Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites à valeurs dans $[0,1]$ et telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$$

Démontrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

Problème 2

La *suite de Prouhet-Morse* est étudiée en informatique théorique et en combinatoire des mots. On la retrouve entre autres dans certains algorithmes de texte, de compression de données ou en complexité. Elle est définie de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{2n} & = u_n \\ u_{2n+1} & = 1 - u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_{2017}.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \{0,1\}$.
3. Écrire un algorithme en Java permettant de calculer u_n pour un rang n donné.
4. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 2017, tels que $u_n = 1$.

Problème 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n$.
2. En déduire que les deux suites sont convergentes.
3. Montrer que que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Problème 4

Les questions sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

   (a) Calculer $u_{n+1} - 3$ et en déduire une écriture de u_n en fonction de n.

   (b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-2^{n+1} + 3)$.

2. Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+a)^k(1+a)^{2n-k}$ où $a \in \mathbb{R}$ et donner les valeurs de a pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

3. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$

   Démontrer que u tend vers 0.

Problème 5

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que

$$\begin{cases} u_0 & \geq 0 \\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite.

Problème 6

Les énoncés sont indépendants.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{2n}{n+1}$

   (a) Que vaut le terme u_{n+1} ?

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est telle minorée ? Majorée ?

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Calculer la limites des suites suivantes :

   (a) $a_n = \frac{3\sqrt{n^5} - \cos(n!) + n^2}{n^3 - 1 + n}$

   (b) $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

   (c) $c_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

   (d) $u_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n+1)}$

   (e) $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\sqrt{2}^k$

   (f) $w_n = \cos^n\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)}\right) + (-1)^n$

Problème 7

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence telles que l'on a $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n^2}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente mais que la suite (v_n) est divergente.