Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites à valeurs dans $[0,1]$ et telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$$

Démontrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,1]$, on peut multiplier l'inégalité par v_n. Il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
La démarche est identique pour u_n.

Problème 2

La *suite de Prouhet-Morse* est étudiée en informatique théorique et en combinatoire des mots. On la retrouve entre autres dans certains algorithmes de texte, de compression de données ou en complexité. Elle est définie de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{2n} & = u_n \\ u_{2n+1} & = 1 - u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_{2017}.

   On procède récursivement.

$u_{2017} = u_{2\times 1008+1} = 1 - u_{1008}$	$u_{2017} = 1$
$u_{1008} = u_{2\times 504} = u_{504}$	$u_{1008} = 0$
$u_{504} = u_{2\times 202} = u_{202}$	$u_{504} = 0$
$u_{202} = u_{2\times 101} = u_{101}$	$u_{202} = 0$
$u_{101} = u_{2\times 50+1} = 1 - u_{50}$	$u_{101} = 0$
$u_{50} = u_{2\times 25} = u_{25}$	$u_{50} = 1$
$u_{25} = u_{2\times 12+1} = 1 - u_{12}$	$u_{25} = 1$
$u_{12} = u_{2\times 6} = u_{6}$	$u_{12} = 0$
$u_{6} = u_{2\times 3} = u_{3}$	$u_{6} = 0$
$u_{3} = u_{2\times 1+1} = 1 - u_{1} = 0$	$u_{3} = 0$
On remonte les calculs	$\uparrow$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \{0, 1\}$.

On pose la propriété suivante :

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \{0, 1\}$$

On va montrer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On le montre par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 0$)

  $u_0 \in \{0, 1\}$. $P(0)$ est vrai.

- Hérédité

  On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.

  On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire, montrer que :

  $$u_{n+1} \in \{0, 1\}$$

  On utilise l'hypothèse de récurrence.

  Si $u_n \in \{0, 1\}$, on a automatiquement $u_{2n} \in \{0, 1\}$.

  De même, si $u_n = 0$, $u_{2n+1} = 1$ et si $u_n = 1$, $u_{2n+1} = 0$. Dans les deux cas $u_{2n+1} = \{0, 1\}$.

  Ainsi, on couvre tous les entiers, $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

  La propriété est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire Dès lors $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \{0, 1\}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Écrire un algorithme en Java permettant de calculer u_n pour un rang n donné.

On a le programme java suivant :

```java
/* Version récursive */
public static int suite(int n) {
```

```
        if(n == 0) {
                return 0;
        }
        if(n%2 == 0) {
                return suite(n/2)
        }
        else {
                return 1 - suite((n-1)/2);
        }
}

/* Version itérative */
public static int suite2(int n) {
        int u_n = 0;
        while(n != 0) {
                if(n%2 == 0) {
                        n = n/2;
                }
                else {
                        u_n = 1 - u_n;
                        n = (n-1)/2;
                }
        }
        return u_n;
}
```

4. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 2017, tels que $u_n = 1$.

On a $u_{2n+1} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_{2n+1} - u_{2n} = 1$.

Dès lors, on a $\sum\limits_{k=0}^{1008} u_{2n+1} - u_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{1008} 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{1008} u_{2n+1} - u_{2n} = 1009$

On a 1009 indices tels que $u_n = 1$ pour $n \in [\![0, 2017]\!]$.

Problème 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n$.

On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$

On souhaite démontrer que la propriété $P(n) : u_n \leq v_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On raisonne par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 1$)

  $u_1 = \sqrt{ab}$ et $v_1 = \frac{a+b}{2}$

  $u_1 \leq v_1 \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab$

$\Leftrightarrow \leq a^2 + b^2 - 2ab$

$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$

$P(1)$ est vraie.

2. En déduire que les deux suites sont convergentes.

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq v_n$$

Dès lors, on a aussi :

- $v_n u_n \leq v_n^2 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq v_n$
- $u_n + v_n \leq 2v_n \Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_n \Leftrightarrow (v_n)$ est décroissante.
- $u_n^2 \leq u_n v_n \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow (u_n)$ est croissante.

Il résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$$

De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$, et v_n est décroissante. Dès lors (v_n) converge vers une limite ℓ.

Mais (u_n) est croissante et majorée par (v_n) qui converge vers l. Dès lors, (u_n) également vers une limite $\ell' \leq \ell$.

3. Montrer que que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On a $u_{n+1} \to \ell$ mais aussi alors $u_n \to \ell$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{\ell'}\sqrt{\ell}$

Il vient que $\ell' = \sqrt{\ell'}\sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell' = \ell$

Des plus (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite.

Problème 4

Les questions sont indépendantes.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

   (a) Calculer $u_{n+1} - 3$ et en déduire une écriture de u_n en fonction de n.

   $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 \Leftrightarrow u_{n+1} - 3 = 2(u_n - 3)$

La forme de (u_n) est conservée, on a $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$.

Dès lors, on en déduit que la suite $(u_n - 3)$ est géométrique de raison 2.

$u_n - 3 = (u_0 - 3)2^n$

Soit

$$u_n = -2^{n+1} + 3$$

(b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-2^{n+1} + 3)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} 3 - 2^{k+1} \\
&= 3 \sum_{k=0}^{n} 1 - 2 \sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&= 3(n+1) - 2\tfrac{1-2^{n+1}}{1-2} \\
&= 3n + 5 - 2^{n+2}
\end{aligned}$$

2. Calculer la somme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+a)^k(1+a)^{2n-k}$ où $a \in \mathbb{R}$ et donner les valeurs de a pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+a)^k(1-a)^{2n-k} \\
&= (1-a)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+a)^k(1-a)^{n-k} \\
&= (1-a)^n(a+1+1-a)^n \\
&= 2^n(1-a)^n = (2-2a)^n
\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n = 0 &\Leftrightarrow -1 < 2 - 2a < 1 \\
&\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} < 1 - a < \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \tfrac{3}{2} > a > \tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow a \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right[
\end{aligned}$$

3. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$

Démontrer que u tend vers 0.

- Pour $m = n$

  On a : $0 \leq u_{n+n} = u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$

  D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$
- Pour $m = n + 1$

  On a : $0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n^2+n}$

  D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$

Les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. D'après le résultat sur les suites extraites $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Problème 5

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie telle que

$$\begin{cases} u_0 & \geq 0 \\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite.

- Pré-étude de la convergence / divergence

  On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

  Si u_n converge vers une limite finie ℓ, on aura également $u_{n+1} \to \ell$, $\sqrt{u_n} \to \sqrt{\ell}$ et $\frac{1}{n+1} \to 0$.

  De là, on a $\ell = \sqrt{\ell}$, d'où $\ell = 1$ (0 étant exclu).

  Dès lors, la suite (u_n) ne peut converger que vers 1 ou diverger.

- Détermination du comportement

  En expérimentant sur les premières itérations de la suite, on voit que celle-ci semble se rapprocher asymptotiquement de 1 à un certain rang.

  On calcule pour tout $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer le sens de variation.
  $u_{n+1} - u_n = \left[\sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}\right] - \left[\sqrt{u_{n-1}} + \frac{1}{n}\right] = \sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}} - \frac{1}{n(n+1)}$
  Par croissante de la fonction racine, on sait que $\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

  Supposons que $u_n - u_{n-1}$ soit négatif, il découle alors que $u_{n+1} - u_n$ l'est aussi pour tout $n \geq 1$:

  $$(u_n \leq u_{n-1}) : (u_{n+1} \leq u_n)$$

  Dans ce cas notre hypothèse est vérifiée, et (u_n) étant décroissant et admettant comme unique limite possible 1, il résulte que (u_n) converge vers 1.

  Deux autres cas sont possibles, en conséquence, si à un rang $n_0 = p$, on a $u_{p+1} \leq u_p$, ce sera vrai par récurrence pour tout $p \leq n_0$. Au contraire, s'il n'existe pas de rang n_0 qui vérifie que u_n est décroissante, c'est que pour tout p, $u_{p+1} \geq u_p$. La suite (u_n) est donc :

  1. Soit décroissante à partir d'un certain rang,
     Dans le premier cas, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et minorée, donc convergente et sa limite ne peut être que 1, ce qui confirme notre hypothèse.
  2. Soit croissante à partir du premier terme.
     La suite dans ce cas ne peut être majorée, donc $u_n \to +\infty$. Mais alors

     $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n + \frac{1}{(n+1)} = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) + \frac{1}{(n+1)}$$

     Il résulte que $u_n \to -\infty$, ce qui est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$.

On peut alors effectivement conclure que la suite (u_n) décroît à partir d'un certain rang et converge vers 1.

Problème 6

Les énoncés sont indépendants.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{2n}{n+1}$

   (a) Que vaut le terme u_{n+1} ?

   $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2}$

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   On calcule $u_{n+1} - u_n$ puis on regarde le signe de l'expression.

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \tfrac{2(n+1)}{n+2} - \tfrac{2n}{n+1} \\ &= \tfrac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= 2 \times \tfrac{n^2+1+2n-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \tfrac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

   Il résulte que (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est telle minorée ? Majorée ?

   La suite est croissante, donc elle est minorée par son premier terme $u_0 = 0$.

   De plus, on peut établir que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n}{2n} = 2$$

   Puisque $n+1 > n$, on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

   On peut donc également affirmer que u_n est majorée par 2.

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   On a très simplement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Calculer la limites des suites suivantes :

   (a) $a_n = \frac{3\sqrt{n^5} - \cos(n!) + n^2}{n^3 - 1 + n}$

   On factorise l'expression par le facteur de plus haut degré.

   $$\begin{aligned} \tfrac{3\sqrt{n^5} - \cos(n!) + n^2}{n^3 - 1 + n} &= \tfrac{3\sqrt{n^4 \times n} - \cos(n!) + n^2}{n^3 - 1 + n} \\ &= \tfrac{3n^2\sqrt{n} - \cos(n!) + n^2}{n^3 - 1 + n} \\ &= \tfrac{\cancel{n^2}\left(3\sqrt{n} - \frac{\cos(n!)}{n^2} + 1\right)}{\cancel{n^2}\left(n - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \tfrac{3\sqrt{n} - \frac{\cos(n!)}{n^2} + 1}{n - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

   On a de base : $-1 \leq \cos(n!) \leq 1$

Dès lors : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n} - \frac{\cos(n!)}{n^2} + 1}{n - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}(3+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

(b) $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

Il s'agit de la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$. Dès lors, on a :

$b_n = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$

Dès lors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$

(c) $c_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

$\frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}$

Or, $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

On déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

De même pour $(-1)^{n+1}$.

Dès lors $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{2}{5}$

(d) $u_n = \frac{n^3+5n}{4n^2+\sin(n)+\ln(n+1)}$

On utilise les justifications que l'on a établies précédemment.

On montre cependant ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$

On a naturellement $\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t+1}}$

On pose $x > 1$, par linéarité de l'intégration, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^x 0dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t+1} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t+1}} &\Leftrightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{2}}{x}
\end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes, il vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$

Il vient alors de suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(e) $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\sqrt{2}^k$

On reconnaît le binôme de Newton.

On a alors $v_n = (\sqrt{2}-1)^n$

Or, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, dès lors, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

(f) $w_n = \cos^n\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)}\right) + (-1)^n$

On pose $X = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)}$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{\pi}{3}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)}\right) = \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{3}} \cos(X) = \frac{1}{2}$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{(n+1)}\right) = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas.

On peut uniquement dire que pour n très grand, w_n est bornée entre -1 et 1 : si n est pair $w_n = 1$ et si n est impair $w_n = -1$.

Problème 7

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par récurrence telles que l'on a $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente mais que la suite (v_n) est divergente.

On rappelle que si une suite (u_n) est définie par récurrence telle que $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction telle que $f : I \to I$. Alors, si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Dès lors, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$ pour montrer que la suite (u_n) converge vers la solution de l'équation précédente.

- Pour la suite $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

  On a la fonction f associée telle que $f(x) = \sqrt{1+x}$

  On résout $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x$

  Comme $I =]0, +\infty[$, on a $\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

  Il vient de suite que u_n converge vers φ.

- Pour la suite $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$

  On suppose qu'il existe un réel ℓ telle que $v_n \to \ell$.

  On a la fonction f associée telle que $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

  On résout $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$

  Comme $I =]0, +\infty[$, on a $\sqrt{1+x^2} = x \Leftrightarrow 1 = 0$

  Ce qui est impossible. L'hypothèse de départ est absurde. v_n ne converge pas.