Tutorat mathématiques : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Résoudre les équations et inéquations en fonction de x suivantes dans $\mathbb{R}$ ou dans l'ensemble proposé.

1. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

   On calcule le discriminant Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$

   $\sqrt{\Delta} = 2 > 0$, l'équation a deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{6} & = 1 \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{6} & = \frac{1}{3} \end{cases}$

   L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{1/3, 1\}$.

2. $(2x-5)^2 = (4x+7)^2$

   On a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

   Soit : $(2x-5)^2 - (4x+7)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-5+4x+7)(2x-5-4x-7) = 0$

   $$\Leftrightarrow (6x+2)(-2x-12) = 0$$

   On résout alors : $\begin{cases} 6x+2 & = 0 \\ -2x-12 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -\frac{1}{3} \\ x & = -6 \end{cases}$

   L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-6, -1/3\}$.

3. $mx + 4 = x + 4m^2$ [discuter la solution selon les valeurs de m]

   On groupe les termes selon x dans le premier membre :

   $mx - x = 4m^4 - 4 \Leftrightarrow x(m-1) = 4(m^2-1)$. On remarque que si $m = 1$, l'équation est $0 = 0$, elle est indéterminée.

   Si $m \neq 1$, $x = \frac{4(m^2-1)}{m-1} = \frac{4(m+1)(m-1)}{m-1} = 4(m+1)$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 1 & \text{indétermination} \\ \text{si } m \neq 1 & 4(m+1) \end{array} \right\}$.

4. $\frac{3x-m}{x-3} = m - 1$ [dans $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, discuter la solution selon les valeurs de m]

On chasse le dénominateur :

$3x - m = (x-3)(m-1) \Leftrightarrow x(4-m) = 3 - 2m$. On remarque que si $m = 4$, l'équation est indéterminée.

Si $m \neq 4$, $x = \frac{3-2m}{4-m}$

Or, l'ensemble donné est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, l'équation $\frac{3-2m}{4-m} = 3$ ne doit pas être satisfaite, soit $m = 9$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } m = 4 \text{ ou } m = 9 & \text{impossible} \\ \text{si } m \neq 4 \text{ et } m \neq 9 & \frac{3-2m}{4-m} \end{array} \right\}$.

5. $(3x-1)^2 > (4x+7)^2$

On écrit :

$(3x-1)^2 - (4x+7)^2 > 0$. On a une différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(3x - 1 + 4x + 7)(3x - 1 - 4x - 7) > 0 \Leftrightarrow (7x+6)(-x-8) > 0$

C'est un produit de binômes de premier degré, on peut faire un tableau de signes.

x	$-\infty$		-8		$-\frac{6}{7}$		$+\infty$
$-x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
$7x+6$		$-$		$-$	0	$+$	
Résultat		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-8, -6/8[$.

6. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-4} > \frac{7}{x-3}$ [dans $\mathbb{R}\backslash\{2,3,4\}$]

On groupe tous les termes dans le premier membre et on réduit au dénominateur commun :

$\frac{3(x-4)(x-3)+4(x-2)(x-3)-7(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)} > 0$

Après réduction du numérateur on obtient :

$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)(x-4)}$, on effectue le tableau de signes du quotient.

x	$-\infty$		-4		2		3		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Résultat		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty, -4[\cup]2, 3[\cup]4, +\infty[$.

7. $-1 < |x-1| - |x| < 1$

On résout chaque partie : $\begin{cases} -1 < |x-1| - |x| & (1) \\ |x-1| - |x| < 1 & (2) \end{cases}$

On commence par (1) :

$-1 < |x-1| - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 < |x-1|$

Si $|x| - 1 < 0$, l'égalité est vraie. On a donc $x \in]-1, 1[$ solution de (1). On résout pour le cas où $|x| - 1$ est positif, soit $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Sous cette condition,

$$\begin{aligned} |x| - 1 < |x-1| &\Leftrightarrow (|x|-1)^2 - |x-1|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 1 + x - 1)(|x| - 1 - x + 1) < 0 \end{aligned}$$

C'est un produit de binômes de premier degré, on résout en cherchant les signes :

$(|x| + x - 2)\underbrace{(|x| - x)}_{\forall x, \geq 0} < 0$. On cherche $|x| + x - 2 < 0$

$|x| + x - 2 < 0 \Leftrightarrow |x| < 2 - x$. L'égalité n'a de sens que si $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$. Soit $x \in]-\infty, 2]$.

Sous cette condition, on a :

$$\begin{aligned} |x| < 2 - x &\Leftrightarrow x^2 < (2-x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 < x^2 + 4 - 4x \\ &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathscr{S}_1 =]-\infty, 1[$.

Même méthode pour (2), on trouve $\mathscr{S}_2 =]0, +\infty[$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 =]0, 1[$

8. $|x+2| = 2x-1$

Pour que l'équivalence soit vérifiée lors de la résolution, on impose que $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Sous cette condition, on a : $|x+2| = 2x-1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = (2x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x+2+2x-1)(x+2-2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(-x+3) = 0$$

Deux solutions sont possibles, $\frac{1}{3}$ et 3. Or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ne peut être solution.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

9. $\frac{|x|}{|x-1|} - |x| \leq 0$ [dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$]

On factorise par $|x|$, on a :

$|x|\left(\frac{1}{|x-1|} - 1\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|x-1|} - 1\right) \leq 0$ On sait que 0 est solution.

$$\Leftrightarrow \frac{1-|x-1|}{|x-1|} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-|x-1| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x-1)(1-x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2-x) \leq 0$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$-$		$-$	0	$+$	
Résultat		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

10. $-x-1 = \sqrt{x^2+1}$

La racine est bien définie sur l'ensemble des réels car : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 > 0$.

On cherche les conditions d'équivalence nous permettant de résoudre, soit : $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$

On pose alors l'ensemble contrainte $C =]-\infty, -1]$.

Sous cette condition : $x^2+1+2x = x^2+1 \Leftrightarrow x = 0$

Or $0 \notin C$, dès lors $\mathscr{S} = \emptyset$.

11. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

On pose $X = x^2$, dès lors, on a :

$X^2 - 11X + 18 = 0$

$\Delta = 121 - 72 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7 > 0$, l'équation a deux solutions : $\begin{cases} X_1 = \frac{11+7}{2} = 9 \\ X_2 = \frac{11-7}{2} = 2 \end{cases}$

On ramène nos solutions en x_1, x_2 : $\begin{cases} X_1 = x_1^2 \Leftrightarrow 9 = x_1^2 \\ X_2 = x_2^2 \Leftrightarrow 2 = x_2^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ ou -3} \\ x_2^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ou -}\sqrt{2} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\right\}$.

12. $e^{2x} - e^x - 1 = 0$

On pose $X = e^x$, dès lors, on a :

$X^2 - X - 1 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 5 > 0$, l'équation a deux solutions : $\begin{cases} X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$

On ramène nos solutions en x_1, x_2 : $\begin{cases} X_1 = e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \ln(X_1) = \ln(\varphi) \\ X_2 = e^{x_2} \Leftrightarrow x_2 = \ln(X_2) \qquad \text{impossible car } -\frac{1}{\varphi} < 0 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{\ln(\varphi)\}$.

13. $|x^2 - x - 1| = 1$

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)^2 = 1^2 &\Leftrightarrow (x^2 - x - 1 - 1)(x^2 - x - 1 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - x) = 0 \end{aligned}$$

0 et 1 sont racines évidentes.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x(x-1)(x^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

14. $\sqrt{x+1} + x = 1$

On donne le domaine de définition $D = [-1, +\infty[$ validant l'existence de la racine $\sqrt{x+1}$.

$\sqrt{x+1} + x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x$. On établie les conditions d'équivalences nécessaires à la résolution. On cherche donc $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$.

On pose ainsi l'ensemble contrainte $C =]-\infty, 1]$.

Sous cette condition, on a :

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2+1-2x$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

Les solutions proposées sont 0 et 3. Or $3 \notin C$.

Cependant $0 \in D$ et $0 \in C$.

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{0\}$.

15. $\sqrt{x^2+x-6} < x+7$

On calcule le domaine de définition D garantissant l'existence de la racine $\sqrt{x^2+x-6}$.

$x^2+x-6=0$, on a deux solutions : $\begin{cases} x_1 & = -3 \\ x_2 & = 2 \end{cases}$

De plus, on cherche les conditions d'équivalence, soit $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

On a l'ensemble de définition $D =]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$ et l'ensemble contrainte $C = [-7, +\infty[$.

On note l'ensemble de résolution $R = D \cap C = [-7, -3] \cup [2, +\infty[$.

Sous cette condition, on résout l'inéquation : $\sqrt{x^2+x-6} \leq x+7 \Leftrightarrow x^2+x-6 \leq x^2+49+14x$

$$x \geq -\frac{55}{13} \approx -4,23$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = R \cap [-55/13, +\infty[= [-55/13, -3] \cup [2, +\infty[$.

Problème 2

Les énoncés sont indépendants.

1. Simplifier l'écriture des réels suivants.

(a) $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)}$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Dès lors : $e^{\ln(3)} - e^{-\ln(4)} = 3 - \frac{1}{e^{\ln(4)}}$
$$= 3 - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{11}{4}$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right)$

On utilise les propriétés suivantes :

- $\forall(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\forall(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$
- $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

Dès lors : $$\begin{aligned}\ln\left(\frac{e^{2+\ln(8)}}{e^{3+\ln(4)}}\right) &= \ln\left(e^{2+\ln(8)}\right) - \ln\left(e^{3+\ln(4)}\right) \\ &= \ln\left(e^2 \times e^{\ln(8)}\right) - \ln\left(e^3 \times e^{\ln(4)}\right) \\ &= \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^{\ln(8)}\right) - \left[\ln\left(e^3\right) + \ln\left(e^{\ln(4)}\right)\right] \\ &= 2 + \ln(8) - [3 + \ln(4)] \\ &= 2 + 3\ln(2) - 3 - 2\ln(2) \\ &= \ln(2) - 1\end{aligned}$$

(c) $e^{2\ln(2)} + \ln\left(e^{-3}\right) + e^{\ln(5)}$

On utilise la propriété supplémentaire :

- $\ln(1) = 0$

$$\begin{aligned}e^{2\ln(2)} + \ln\left(e^{-3}\right) + e^{\ln(5)} &= e^{\ln(4)} + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right) + 5 \\ &= 4 - 3 + 5 = 6\end{aligned}$$

(d) $\frac{e}{e^{1+\ln(2)}}$

On considère les formules précédentes.

$$\begin{aligned}\frac{e}{e^{1+\ln(2)}} &= \frac{e}{e \times e^{\ln(2)}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes puis les simplifier.

(a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

L'expression n'existe que si $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

On a $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

On a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x + 4} &= \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |x - 2|\end{aligned}$$

(b) $\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)$

La fonction ln est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs.

La fonction e décrit l'ensemble des réels strictement positifs.

Dès lors, on a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

On a la propriété suivante :

- $\ln(e) = 1$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{e^{1-x}}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) &= \ln\left(e^{1-x}\right) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= \ln(e \times e^{-x}) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= \ln(e) - \ln(e^x) - \ln(e) + \ln(e^x) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x})$

Même justification que précédemment. On a le domaine de définition $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) &= \ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) \\ &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 1) + \ln(e^x) \\ &= x\end{aligned}$$

3. $e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Attention ! ! Ce n'est pas parce que $e^{\ln(x)} = x$ que l'on a le même domaine de définition pour les deux expressions.

En particulier on a la fonction ln qui est définie uniquement pour les réels strictement positifs. Les autres expressions sont définies pour sur tout $\mathbb{R}$. Dès lors, il ici que résulte que $D = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}e^{\ln(x)} - \ln(2e^x) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= x - [\ln(2) + \ln(e^x)] - [\ln(1) - \ln(2)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Problème 3

Les énoncés sont indépendants.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire le calcul de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

On cherche un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

On procède par identification, soit : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$

Dès lors, on identifie les coefficients, il vient que l'on a : $\begin{cases} a + b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = -1 \\ a & = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On pratique un télescopage.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 &- \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} &- \frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} &- \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$+\vdots$$
$$+\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

2. Simplifier la somme S_n suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times ... \times \frac{n-1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -\ln(n)
\end{aligned}$$

3. Simplifier le produit P_n suivant : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

4. Calculer les doubles sommes suivantes :

(a) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 1$

Les sommes doubles s'expriment l'une par rapport à l'autre.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 &= \sum_{i=0}^{n} i \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

(b) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} (i+j)$

La variable i est libre par rapport à la deuxième somme.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} (i+j) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=0}^{i} j\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{i} 1 + \sum_{j=0}^{i} j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(i(i+1) + \tfrac{i(i+1)}{2} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\tfrac{3}{2} i(i+1) \right) \\
&= \tfrac{3}{2} \sum_{i=0}^{n} \left(i^2 + i \right) \\
&= \tfrac{3}{2} \left[\sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i \right] \\
&= \tfrac{3}{2} \left[\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \tfrac{n(n+1)}{2} \right] \\
&= \tfrac{3}{2} \left[\tfrac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6} \right] \\
&= \tfrac{3}{2} \left[\tfrac{2n(n+1)(n+2)}{6} \right] \\
&= \tfrac{n(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

5. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage :

   (a) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \tfrac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\tfrac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \ln(n+1) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}
$$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times k! &= \sum_{k=0}^{n} (k+1-1) \times k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)k! - k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)! - k! \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}
$$

   (c) $\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$

$$
\sum_{k=p-3}^{n-1} (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}
$$

   (d) $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$

Posons la suite $u_k = (ak+b)2^k$ et cherchons a et b tels que, pour tout entier k, $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= (a(k+1)+n)2^{k+1} - (ak+b)2^k \\ &= 2^k\left[2(a(k+1)+b) - (ak+)\right] \\ &= (ak+2a+b)2^k \end{aligned}$$

En prenant $a = 1$ et $b = 0$ on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k$. Il résulte que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k - k2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n+1)2^{n+1} \end{aligned}$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Développer $(k+1)^4 - k^4$. En déduire que : $(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

On développe le triangle de Pascal jusqu'à obtenir la ligne 4, ce qui nous donnera les coefficients de notre identité.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On a donc :

$$\begin{aligned} (k+1)^4 - k^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

On effectue un télescopage.

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n}\left(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right)$$

Soit en développant :

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

(b) En déduire le calcul de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ en fonction de n.

On a :

$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 6 \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 4 \sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} 1$

En développant les sommes connues, on obtient :

$(n+1)^4 - 1 = 4 \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$

Il en résulte que :

$\frac{(n+1)^4 - 1 - [n(n+1)(2n+3)+n]}{4} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Soit en simplifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Problème 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à tout couple de nombres associe :

$$f(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

1. Que vaut $f(3,0)$? $f(-1,0)$? $f(2,4)$?

   $f(3,0) = \frac{3+0+|3-0|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

   $f(-1,0) = \frac{-1+0+|-1-0|}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$

   $f(2,4) = \frac{2+4+|2-4|}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$

2. Montrer que $f(x,y) = \max(x,y)$.

   On distingue 3 cas :

   - Si $x = y$

     $f(x,y) = f(y,y) = f(x,x) = \frac{x+x+|x-x|}{2} = \frac{2x}{2} = x = y = \max(x,y)$
   - Si $x < y$

     $|x-y| = y - x$

     $f(x) = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x,y)$
   - Si $x > y$

     $|x-y| = x - y$

     $f(x) = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x,y)$

   Les trois cas sont vérifiés, dès lors $f(x,y) = \max(x,y)$.

3. Déterminer $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ une fonction $g(x,y,z) = \max(x,y,z)$. On pourra exprimer g à l'aide de f.

   On a $g(x,y,z) = f(f(x,y),z) = \max(x,y,z)$.

Problème 5

Démontrer les propriétés suivantes par récurrence :

1. Somme des entiers au carré.

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On raisonne par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 0$)
  $\sum\limits_{k=0}^{0} k^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité

  On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que la propriété $P(n)$ est vraie.

  On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire, montrer que :

  $$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

  On utilise l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \tfrac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \tfrac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6} = \tfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

  $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion

  La propriété $P(n)$ est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire. Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. Somme alternée des entiers (décomposer selon la parité de n, soit $2n$ et $2n+1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- On commence par démontrer le cas si n est pair.
  - Initialisation (pour $n = 0$)
    $\sum\limits_{k=0}^{0} (-1)^k k = 1 \times 0 = 0$
    $\frac{0}{2} = 0$
    $P(0)$ est vraie.
  - Hérédité

    On suppose qu'il existe un entier naturel pair $2n$ tel que $P(2n)$ est vraie.

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = \frac{2(n+1)}{2} = n+1$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :
$\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k\right) + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) = n + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2)$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n + -(2n+1) + (2n+2)$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k k = n+1$
La propriété $P(2(n+1))$ est vraie.

- Conclusion
  La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire pour le cas où n est pair. Dès lors $P(2n)$ est vraie.

- On poursuit si n est impair.
  - Initialisation (pour $n=1$)

$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k k = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$
$-\frac{2}{2} = -1$
$P(1)$ est vraie.

  - Hérédité
    On suppose qu'il existe un entier naturel impair $2n+1$ tel que $P(2n+1)$ est vraie.
    On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $2(n+1)+1$, c'est-à-dire montrer que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -\frac{2(n+1)+1+1}{2} = -(n+2)$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :
$\left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k\right) + (-1)^{2n+2}(2n+2) + (-1)^{2n+3}(2n+3) = -(n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) + (-1)^{2n+3}(2n+3)$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+1) + (2n+2) - (2n+3)$
$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k k = -(n+2)$
La propriété $P(2(n+1)+1)$ est vraie.

  - Conclusion
    La propriété est initialisée au rang $n=1$ et est héréditaire pour le cas où n est impair. Dès lors $P(2n+1)$ est vraie.

La propriété est vérifiée dans le cas où n est pair et impair. Dès lors, elle est vraie pour tout

$n \in \mathbb{N}$.

3. Racine itérée (on pensera à utiliser la relation $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$).

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}$$

- Initialisation (pour $n = 1$)
  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
  $P(1)$ est vraie.
- Hérédité
  On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.
  On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire, montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}}_{n+1 \text{ racines}}$$

On pose $a = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, on sait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$

On utilise l'hypothèse de récurrence.

$$\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}}_{n+1 \text{ racines}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

  La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire Dès lors $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}}_{n \text{ racines}}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.