Tutorat mathématiques : TD7

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

On considère les matrices P et D appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calcul matriciel
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Soit la matrice $A = P.D.P^{-1}$. Calculer A.
   (c) Soit la propriété $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$. Démontrer que $P(n)$ est vraie.
2. Soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et définies par récurrence telles que : $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$
   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Traduire ces suites par un système matriciel. Quelle relation vérifie ce système ?
   (b) On pose $X_n = P.D^n.P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer (u_n) et (v_n) en fonction de n.

Problème 2

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $A_0 - A_1$ et $A_0 A_1$
2. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 3m \end{pmatrix}$
3. Calculer $\det(A_m)$ puis donner $\det(A_0)$, $\det(2\,{}^tA_0)$, $\det(A_0^3)$.
4. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
5. Déterminer sans calcul l'ensemble des solutions (S_0).
6. Résoudre (S_1).

Problème 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(A)$ la somme des coefficients de A.

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Exprimer $U.A.U$ en fonction de $\sigma(A)$ et U.

Problème 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ_n le déterminant suivant de taille $n \times n$ tel que :

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}}_{n} \Big\} n$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. On pourra penser à factoriser selon les colonnes.
2. Démontrer que : $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$

Problème 5

Les *matrices stochastiques* sont des structures très utilisées en informatique et en probabilités. Elles sont à la base des *chaînes de Markov* qui servent en particulier à modéliser des processus aléatoires complexes de manière très simple et forment ainsi des outils puissants pour l'étude de problèmes.
Une matrice M est dite stochastique si et seulement si :

$$M \in \mathcal{M}_n([0,1]) \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

C'est-à-dire que tous les coefficients m_{ij} de M appartiennent à $[0,1]$ (en fait ces coefficients représentent des probabilités), et la somme des coefficients en ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille n.
Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $A \times B$ est une matrice stochastique.

Problème 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$. Que peut-on constater ? Pourquoi ?
   Développer $(A+B)^2$, factoriser $A^3 - I_2$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer $\mathcal{C}_B = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | BM = MB\}$.
4. Déterminer $\mathcal{O}_{MB} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | MB = \mathcal{O}_2\}$.