Tutorat mathématiques : TD7

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

* * *

Problème 1

On considère les matrices P et D appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calcul matriciel

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

   $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Donc P est inversible.
   On rappelle que : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t\mathrm{com}(P)$.
   On trouve ainsi que $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

   (b) Soit la matrice $A = P.D.P^{-1}$. Calculer A.

   $$A = P.D.\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}P.D.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) Soit la propriété $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$. Démontrer que $P(n)$ est vraie.

   - Initialisation (pour $n = 0$).
     $A^0 = I_2$
     $P.D^0.P^{-1} = P.P^{-1} = I_2$
     $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.
     On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est à dire, montrer que

     $$A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$$

     On utilise l'hyposthèse de récurrence.
     $A^n = P.D^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n.A = P.D^n.P^{-1}.A$
     $\Leftrightarrow A^{n+1} = P.D^n.P^{-1}.P.D.P^{-1}$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

  La propiété est initialisée pour $n = 0$ et hérédiataire. Dès lors $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1}$ est vraie.

2. Soient les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et définies par récurrence telles que : $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Traduire ces suites par un système matriciel. Quelle relation vérifie ce système ?

   On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_{n+1} = A.X_n$.

   On a une relation géométrique pour ces deux suites, et on a $u_n = q^n u_0$ où u_n est le terme général et q la raison.

   Dès lors, on a :

   $$X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) On pose $X_n = P.D^n.P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer (u_n) et (v_n) en fonction de n.

   On a alors $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P.D^n.P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ Car c'est une matrice diagonale.

   $$\begin{aligned} \text{On a } P.D^n.P^{-1} &= \tfrac{1}{2}\left[(-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Soit $X_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 3^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$

   Finalement on a $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) \\ v_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + (-1)^n) \end{cases}$

Problème 2

On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $A_0 - A_1$ et $A_0 A_1$

On a $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Et $A_0 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_0 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Écrire le système linéaire (S_m) d'écriture matricielle $A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 3m \end{pmatrix}$

On a le système (S_m) suivant :

$$(S_m) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} -x & +2y & -z & = & 0 \\ mx & -y & +z & = & m \\ x & +y & +z & = & 3m \end{array} \right.$$

3. Calculer $\det(A_m)$ puis donner $\det(A_0)$, $\det(2\,{}^tA_0)$, $\det(A_0^3)$.

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \text{ On développe suivant } L_3.$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ m & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1-m)$$

$\det(A_0) = 3$

$$\begin{aligned} \det(2\,{}^tA_0) &= 2^3 \times \det({}^tA_0) \\ &= 8\det(A_0) \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_0^3) &= \det(A_0)^3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

4. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

A_m est inversible si et seulement si $\det(A_m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

5. Déterminer sans calcul l'ensemble des solutions (S_0).

On a le résultat suivant :

Théorème de Cramer - *Soit un système (S) représenté sous forme matricielle tel que :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \times X = \Lambda$$

où la matrice A contient les coefficients des inconnues, le vecteur colonne X contient ces inconnues et le vecteur colonne Λ contient les membres de droite des équations du système.

Alors, (S) admet une unique solution si et seulement si sa matrice A est inversible, le $n-$uplet est composé des coefficients :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

avec A_k, la matrice obtenue en remplaçant la $k-$ième colonne de A par Λ.

On la solution triviale $\mathscr{S} = \{(0,0,0)\}$. De plus, comme (S_0) est un système à la Cramer, on sait qu'il existe un unique triplet solution qui est la solution précédemment donnée.

6. Résoudre (S_1).

On a le système (S_1) suivant :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x & +2y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & +2y & -z & = & 0 \\ & y & & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & & -z & = & -2 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & y & & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{cases}$$

On a L_1 et L_3 qui sont équivalentes. Il résulte :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & x \\ y & = & 1 \\ z & = & 2-x \end{cases}$$

On a le triplet solution $\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R} | (x, 1, 2-x)\}$.

Problème 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\sigma(A)$ la somme des coefficients de A.

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Exprimer $U.A.U$ en fonction de $\sigma(A)$ et U.

On appelle $s(j)$ la somme des coefficients a_{ij} de la colonne j. On a

$$s(j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

On calcule $U \times A$

$$U \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$$

De même, on peut exprimer $\sigma(A)$ grâce à $s(j)$.

$$\sigma(A) = \sum_{j=1}^{n} s(j)$$

On poursuit notre calcul.

$$\begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix} \times U = \begin{pmatrix} s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Grâce à la définition précédente de $\sigma(A)$. Il vient que :

$$U.A.U = \sigma(A) \times U$$

Problème 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ_n le déterminant suivant de taille $n \times n$ tel que :

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}}_{n} \Bigg\updownarrow n$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. On pourra penser à factoriser selon les colonnes.

On simplifie Δ_n par la colonne C_1. On a :

$$\Delta_n = (-1)^{1+1}a\underbrace{\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-2 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} + (-1)^{1+n}(n-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ a & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}}_{\delta}$$

On va simplifier δ, on a simplifie par la ligne L_1.

$$\delta = (-1)^{(n-1)+1}(n-1)\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$= (-1)^n(n-1)a^{n-2}$

On a donc $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - (n-1)^2a^n$

2. Démontrer que : $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$

On pose la propriété $P(n) : \forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2$.

Démontrons celle-ci par récurrence.

- Initialisation (pour $n = 2$)

  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$

  $= a^2 - 1$

  $a^2 - a^0\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = a^2 - 1$

  $P(2)$ est vraie.

- Hérédité

  On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ est vraie.

  On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire, montrer que

  $$\Delta_{n+1} = a^{n+1} - a^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  On sait grâce à la question précédente que :

  $\Delta_{n+1} = a\Delta_n - n^2a^{n-1}$ *On a avancé d'un rang.*

  On utilise l'hypothèse de récurrence.

  $\Delta_{n+1} = a\left(a^n - a^{n-2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2\right) - n^2a^{n-1}$

  $= a^{n+1} - a^{n-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2\right) - n^2a^{n-1}$

$$= a^{n+1} - a^{n-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) + n^2\right]$$
$$= a^{n+1} - a^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

  La propiété est initialisée pour $n = 2$ et hérédiataire. Dès lors $P(n)$: $\forall n \geq 2, \Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ est vraie.

Problème 5

Les *matrices stochastiques* sont des structures très utilisées en informatique et en probabilités. Elles sont à la base des *chaînes de Markov qui* servent en particulier à modéliser des processus aléatoires complexes de manière très simple et forment ainsi des outils puissants pour l'étude de problèmes.
Une matrice M est dite stochastique si et seulement si :

$$M \in \mathcal{M}_n([0,1]) \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

C'est-à-dire que tous les coefficients m_{ij} de M appartiennent à $[0,1]$ (en fait ces coefficients représentent des probabilités), et la somme des coefficients en ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille n.
Soit $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $A \times B$ est une matrice stochastique.

Soient les matrices A et B telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $A \times B = C$ et les coefficients c_{ij} de C.
Par définition du produit matricielle, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

La somme des éléments de la ligne i de C est donc

$$(C)_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$$

Par ré-écriture, on a $(C)_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \ \textit{Or, } \sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1 \textit{ car } B \textit{ est stochastique.}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Il résulte que $A \times B$ est bien une matrice stochastique. (De même pour $B \times A$).

Problème 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$. Que peut-on constater ? Pourquoi ?

   Développer $(A+B)^2$, factoriser $A^3 - I_2$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 28 & 42 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$2AB = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

On a donc : $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 47 & 66 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 49 & 56 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$

Le résultat n'est pas le même car l'anneau des matrices ne possède par les mêmes propriétés que le corps des nombres réels. (Perte de la commutativité entre autres).

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\
&= (A+B)(A+B)\\
&= A^2 + AB + BA + B^2
\end{aligned}$$

$A^3 - I_2 = (A - I_2)(A^2 + A + I_2)$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

On a $A^2 = 3I_2$. De là, on déduit immédiatement que $A^{-1} = \frac{1}{3}A$.

De plus on a $A^3 = A \times A^2$

$\qquad = 3A$

Et $A^4 = A^2 \times A^2$

$\qquad = 3^2 I_2$

Par récurrence, on devine que $A^n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}} I_2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{\frac{n-1}{2}} \times A & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. Déterminer $\mathcal{C}_B = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | BM = MB\}$.

On cherche $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a+2b & 6a+3b \\ 4c+2d & 6c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+6c & 4b+6d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix}$$

On est amené à résoudre le système suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b & = 4a+6c \\ 6a+3b & = 4b+6d \\ 4c+2d & = 2a+3c \\ 6c+3d & = 2b+3d \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a & = \frac{1}{2}c+d \\ b & = 3c \\ c & = c \\ d & = d \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{C}_B = \left\{ M(c,b) \middle| M(c,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists (c,b) \in \mathbb{R}^2, M(c,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c+d & 3c \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$.

4. Déterminer $\mathcal{O}_{MB} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | MB = \mathcal{O}_2\}$.

Le système suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b & = 0 \\ 6a+3b & = 0 \\ 4c+2d & = 0 \\ 6c+3d & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b & = 0 \\ 2a+b & = 0 \\ 2c+d & = 0 \\ 3c+d & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b & = -2a \\ d & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}$$

On a l'ensemble solution $\mathcal{O}_{MB} = \left\{ M(a) \middle| M(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exists a \in \mathbb{R}, M(a) = \begin{pmatrix} a & -2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.