Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Les énoncés sont indépendants.

1. Démontrer que n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair.
2. Démontrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{K}$. ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$)

Problème 2

Le théorème de Cantor énonce le résultat suivant :

> ***Théorème de Cantor -*** *Pour tout ensemble E fini ou infini, il n'existe pas de bijection entre E et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$.*

1. Montrer qu'il existe une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$.
2. On considère la partie $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A = \{x \in E | x \notin \varphi(x)\}$, soit l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à leur propre image par la fonction $\varphi : E \to \mathcal{P}(E)$. Montrer que φ n'est pas surjective puis conclure.

Problème 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle.

1. Écrire en langage mathématique les assertions suivantes :
   (a) (P) : la suite (u_n) est croissante.
   (b) (Q) : la suite (u_n) est majorée par 2.
2. On suppose (P) et (Q) vraies ; qu'en déduisez-vous pour (u_n) ?
3. On considère l'assertion suivante :
$$(R) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 2| \leq \varepsilon$$
4. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
   (a) Donner un exemple de suite réelle vérifiant (R).
   (b) Écrire en langage mathématique l'assertion $\neg(R)$.

Problème 4

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Déterminer les racines carrées complexes de $8-6i$. En déduire les antécédents de $1+i$ par f.
3. Soit h, un complexe. Discuter selon les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.
4. Déterminer $f(D_f)$. La fonction est-elle une application surjective de D_f dans $\mathbb{C}$?
5. f est-elle une application injective de D_f dans $\mathbb{C}$?

Problème 5

On rappelle que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des entiers naturels. On note $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \infty$.
$\mathbb{N}$ est un *ensemble infini dénombrable.*
On peut prouver que deux ensembles E et F ont le même cardinal s'il existe une bijection f entre eux.

$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F) \Leftrightarrow \left(\exists f \in F^E | \forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y\right)$$

Par exemple, pour montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z})$. Il nous suffit de créer la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Montrer que f réalise bien une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.
2. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Montrer que $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Problème 6

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x+1|$.
   (a) Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ associée à f dans le plan $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les ensembles $f([-3, 2]), f(\{-2\}), f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-5, 2])$.
   (c) L'application$f$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. On considère de plus l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = |x-1|$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g \circ f(x) = 1$. On rappelle que $g \circ f(x) = g(f(x))$.
   (b) Représenter graphiquement l'application $g \circ f$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Problème 7

Soit l'application $f : E \to F$ définie telle que $f(x) = x^2$.

1. Donner deux ensembles E et F tels que f soit injective mais non surjective.
2. Donner deux ensembles E et F tels que f soit non injective mais surjective.
3. Donner deux ensembles E et F tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner deux ensembles E et F tels que f soit bijective.