

Tutorat mathématiques : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**

Les énoncés sont indépendants.

1. Démontrer que
- n
- est pair
- $\Leftrightarrow n^2$
- est pair.

Pour montrer une équivalence, on démontre les deux implications réciproques l'une de l'autre.

- n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.

On utilise les propriétés de l'implication. En particulier, celle-ci est fautive dans l'unique cas où l'hypothèse est vraie et la thèse est fautive.

On utilise un *raisonnement déductif*. On émet alors l'hypothèse que n est pair.Comme n est pair, on peut écrire que $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.On obtient donc $n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. Dès lors n^2 est effectivement pair.

- n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair.

On démontre cette implication à l'aide de sa *contraposée*. En effet, démontrer $P \Rightarrow Q$ revient à démontrer $\neg Q \Rightarrow \neg P$.Dès lors, notre assertion est équivalente à : n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair.Ce qui est équivalent à : n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair.

On résout par déduction comme précédemment

2. Démontrer que 0 n'a pas d'inverse dans
- \mathbb{K}
- . (
- $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$
-)

On utilise un raisonnement par l'absurde.

Supposons un nombre $a \in \mathbb{K}$ tel que

$$a \times 0 = 1$$

On a $a \times 0 = 1 \Leftrightarrow a \times (0 + 0) = 1$

$$\Leftrightarrow a \times 0 + a \times 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1$$

|| On aboutit à une contradiction, l'hypothèse de départ est absurde. 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{K} .

Problème 2

Le théorème de Cantor énonce le résultat suivant :

Théorème de Cantor - Pour tout ensemble E fini ou infini, il n'existe pas de bijection entre E et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$.

|| On a l'injection triviale $\varphi : x \rightarrow \{x\}$.

2. On considère la partie $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$, soit l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à leur propre image par la fonction $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Montrer que φ n'est pas surjective puis conclure.

Montrons qu'il n'existe pas de surjection entre E et $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde. On construit pour cela l'ensemble A des éléments de E qui n'appartiennent pas à leur propre image. Dès lors, quels éléments de E donnent A comme image par φ ?

Cet argument utilise une méthode semblable à celle du *paradoxe de Russell*.

On suppose que $\exists a \in E \mid \varphi(a) = A$, dès lors :

$$a \in A \Rightarrow a \notin \varphi(a) = A$$

ce qui est absurde, car si $a \in A$, par construction de A , il ne appartient pas à sa propre image par φ et donc appartenir à A .

De même :

$$a \notin A \Rightarrow a \in \varphi(a) = A$$

ce qui est absurde également. Dans les deux cas, A n'a pas d'antécédent. On a réussi à construire un ensemble qui n'a pas d'antécédent, dès lors, φ n'est pas surjective et donc, il n'existe pas de bijection entre E (vide, fini, ou infini) et $\mathcal{P}(E)$.

Problème 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle.

1. Écrire en langage mathématique les assertions suivantes :

(a) (P) : la suite (u_n) est croissante.

|| $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

(b) (Q) : la suite (u_n) est majorée par 2.

$$\| \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$$

2. On suppose (P) et (Q) vraies; qu'en déduisez-vous pour (u_n) ?

$\|$ La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle est convergente. Mais on ne peut pas affirmer qu'elle converge vers 2, on sait juste dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ tel que $\alpha \leq 2$.

3. On considère l'assertion suivante :

$$(R) : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - 2| \leq \varepsilon$$

(a) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

$\|$ La suite (u_n) converge vers 2.

(b) Donner un exemple de suite réelle vérifiant (R) .

$\|$ On peut donner l'exemple de la suite $u_n = 2$, tout simplement...

(c) Écrire en langage mathématique l'assertion $\neg(R)$.

$\| \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 2| > \varepsilon$

Problème 4

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .

$\|$ La fonction est définie si et seulement si $z - 2i \neq 0 \iff z \neq 2i$. Soit $D_f = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$

2. Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$. En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f .

(a) On pose $\Delta = 8 - 6i$

On cherche $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

On a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(\Delta) = 8 & (1) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 10 & (2) \\ 2xy = \Im(\Delta) = -6 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \iff 2x^2 = 18$$

$$\iff x = 3 \text{ ou } -3$$

$$(2) - (1) \iff 2y^2 = 2$$

$$\iff y = 1 \text{ ou } -1$$

(3) < 0 x et y ont un signe différent.

$$\begin{cases} \delta_1 &= 3 - i \\ \delta_2 &= -3 + i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(z) = 1 + i &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z-2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z-2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow z^2 = (z - 2i)(1 + i) \\ &\Leftrightarrow z^2 = z + iz - 2i + 2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - z(i + 1) + 2i - 2 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant : $\Delta = (i + 1)^2 - 4(2i - 2) = 1 - 1 + 2i - 8i + 8 = 8 - 6i$

On a déjà calculé les racines de ce discriminant. On a deux solutions complexes : $\begin{cases} z_1 &= \frac{(i+1)-(3-i)}{2} = i - 1 \\ z_2 &= \frac{(i+1)+(3-i)}{2} = 2 \end{cases}$

On a alors :

$$f(i - 1) = f(2) = i + 1$$

3. Soit h , un complexe. Discuter selon les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f .

$$f(z) = h \Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = h^2 - 8ih = h(h - 8i)$.

Comme tout nombre complexe, sauf zéro, admet exactement deux racines carrées, h admet deux antécédents par f si et seulement si $h \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$ et une seule et unique sinon.

4. Déterminer $f(D_f)$. La fonction est-elle une application surjective de D_f dans \mathbb{C} ?

On vient de voir que tout élément $h \in \mathbb{C}$ admet au moins un antécédent par f ce qui signifie que :

$$f(D_f) = \mathbb{C} : f \text{ est une surjection de } D_f \rightarrow \mathbb{C}$$

5. f est-elle une application injective de D_f dans \mathbb{C} ?

|| f n'est pas injective, on a vu e particulier que $f(2) = f(i - 1)$.

Problème 5

On rappelle que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels. On note $\text{card}(\mathbb{N}) = \infty$.

\mathbb{N} est un *ensemble infini dénombrable*.

On peut prouver que deux ensembles E et F ont le même cardinal s'il existe une bijection f entre eux.

$$\text{card}(E) = \text{card}(F) \Leftrightarrow (\exists f \in F^E | \forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y)$$

Par exemple, pour montrer que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$. Il nous suffit de créer la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle

$$\text{que } f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Montrer que f réalise bien une bijection de \mathbb{N} vers \mathbb{Z} .

Soit $\varphi \in \mathbb{N}$

On sépare les cas où φ est pair et impair

- $f(2\varphi) = -\frac{2\varphi}{2} = -\varphi$
Soit $f(2\mathbb{N}) = \{0, -1, -2, \dots\}$
- $f(2\varphi + 1) = \frac{2\varphi+1+1}{2} = \frac{2(\varphi+1)}{2} = \varphi + 1$
Soit $f(2\mathbb{N} + 1) = \{1, 2, 3, \dots\}$

Dès lors, $\{0, -1, -2, \dots\} \cup \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}$. On a bien une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{Z} .

2. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Montrer que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(E)$

|| Il suffit de créer la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que $f(n) = n - 1$.

3. Montrer que $\text{card}(\mathbb{N}^2) = \text{card}(\mathbb{N})$, en déduire que $\text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{N})$.

On peut créer la fonction $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(i, j) = i + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$

- Pour montrer qu'elle est injective :

On suppose que $\exists(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $\exists(c, d) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\Leftrightarrow (f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)) \\ &\Leftrightarrow a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = c + \frac{(c+d)(c+d+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow 3(a-c) + (b-d) + (a+b)^2 - (c+d)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(a-c) + (b-d) + (a+b+c+d)(a+b-c-d) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{On a } \begin{cases} a-c & = 0 \\ b-d & = 0 \\ a+b+c+d & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d \\ c & = -d \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a-c & = 0 \\ b-d & = 0 \\ a+b-c-d & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = c \\ b & = d \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Dès lors, on a bien $(a, b) = (c, d)$

- Pour montrer qu'elle est surjective :

On a :

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

$$\forall(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* | f(a+1, b-1) = f(a, b) + 1$$

On peut conclure que f est surjective.

Il résulte que f est bien bijective. L'ensemble des fractions \mathbb{Q} peut être vu tel que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* \right\}$.

On a vu que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z})$ et de plus $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}^2)$ et on sait que \mathbb{Q} peut-être vu en terme de couple. Dès lors $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Q})$.

4. Démontrer que $\text{card}(]0, 1[) \neq \text{card}(\mathbb{N})$

On suppose que $]0, 1[$ est dénombrable de la même manière que \mathbb{N} . Dès lors, on peut construire un ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ qui correspond à tous les nombres possibles qui appartiennent à $]0, 1[$.

Ainsi, chaque ω_i est un nombre tel que $\omega_i = 0, r_{i1}r_{i2}r_{i3}\dots$ avec $r_j \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

Par exemple, on peut trouver :

$$\omega_1 = 0, 01820\dots$$

$$\omega_2 = 0, 45023\dots$$

$$\omega_3 = 0, 31415\dots$$

$$\omega_4 = 0, 22193\dots$$

$$\omega_5 = 0, 16180\dots$$

\vdots

On construit le nouveau nombre ω' telle que $r'_i = r_{ii} + 1$ (modulo 10). Avec l'exemple précédent, on a :

$$\omega' = 0, 16501\dots$$

Or ω' diffère de tous ω_i d'au moins un r'_i , dès lors $\omega' \notin \Omega$. Ainsi $]0, 1[$ n'est pas dénombrable et donc $\text{card}(\mathbb{N}) \neq \text{card}(]0, 1[)$.

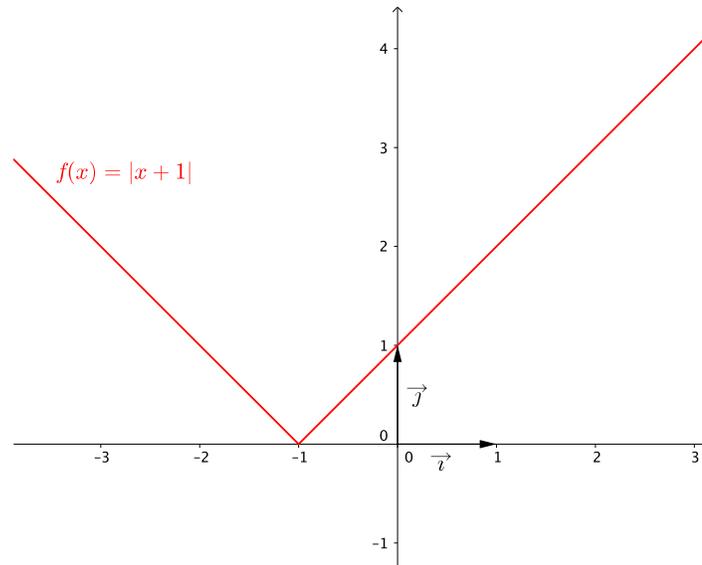
5. Montrer que $\text{card}(]0, 1[) = \text{card}(\mathbb{R})$

|| Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. f réalise bien une bijection de $]0, 1[$ vers \mathbb{R} .

Problème 6

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x + 1|$.

(a) Représenter graphiquement la courbe \mathcal{C} associée à f dans le plan \mathbb{R}^2 .

FIGURE 1 : Fonction f dans le plan \mathbb{R}^2

(b) Calculer les ensembles $f([-3, 2])$, $f(\{-2\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}([-5, 2])$.

- $f([-3, 2]) = [0, 3]$
- $f(\{-2\}) = \{1\}$
- $f^{-1}(\{1\}) = \{-2, 0\}$
- $f^{-1}([-5, 2]) = [-3, 1]$

2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

- L'application n'est pas injective car $f(-2) = f(0) = 1$ et $-2 \neq 0$.
- L'application n'est pas non plus surjective car elle décrit uniquement les nombres positifs. Elle est surjective cependant de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^+ .
- Elle n'est pas injective donc elle n'est pas bijective.

3. On considère de plus l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(x) = |x - 1|$.

(a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g \circ f(x) = 1$. On rappelle que $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

donc

$$g(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 1$$

On a l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{-3, -1, 1\}$.

(b) Représenter graphiquement l'application $g \circ f$ dans le plan \mathbb{R}^2 .

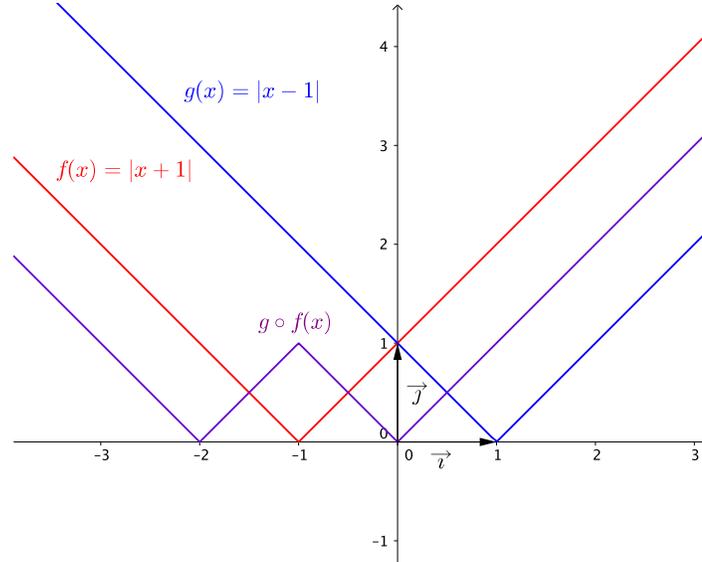


FIGURE 2 : Fonction f dans le plan \mathbb{R}^2

Problème 7

Soit l'application $f : E \rightarrow F$ définie telle que $f(x) = x^2$.

1. Donner deux ensembles E et F tels que f soit injective mais non surjective.
 || Par exemple $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$
2. Donner deux ensembles E et F tels que f soit non injective mais surjective.
 || Par exemple $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$
3. Donner deux ensembles E et F tels que f soit ni injective ni surjective.
 || Par exemple $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
4. Donner deux ensembles E et F tels que f soit bijective.
 || Par exemple $E = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$