Tutorat mathématiques : TD6

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie telle que $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{e^x - 1}$

1. Calculs des limites.
   (a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
   (b) Montrer que f est continue en 0 et calculer sa limite.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et chercher une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan. On donnera également sa position relative par rapport à $\mathcal{C}$.

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n \qquad (*)$$

1. Montrer que l'équation $(*)$ est équivalente à : $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=3}^{n+2} e^{n \ln\left(\frac{k}{n}\right)}$.
2. Démontrer que : $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq b - a$.
3. Résoudre l'équation $(*)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3

1. Montrer que pour tout $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
3. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$.

Problème 4

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la fraction continue $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que cette solution est dans $I = \left]\frac{3}{2}, 2\right[$
2. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$
   (a) Écrire un algorithme en java `public static double suite(int n)` qui pour un rang n donné retourne la valeur de la suite u_n.
   (b) Montrer que (u_n) converge vers la solution φ.

Problème 5

Pour $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2$, on considère les fonctions f_λ telles que :

$$f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$$

On désigne par $\mathcal{C}_\lambda$ les courbes des fonctions f_λ.

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ sont concourantes (i.e. se croisent en un point).

Problème 6

On définit la fonction f en posant $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. La fonction f est-elle paire ? Impaire ?
3. Calculer la dérivée f' de f et en déduire que f' a le même signe que $x^2 - 12$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$, y faire figurer les limites aux différentes bornes de D_f.
5. Déterminer, si elle existe, l'asymptote Δ en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.