Tutorat mathématiques : TD6

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie telle que $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{e^x - 1}$

1. Calculs des limites.

   (a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = (e^0)' = 1$.

   (b) Montrer que f est continue en 0 et calculer sa limite.

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\frac{e^x - 1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$. Dès lors f est continue en 0 (+ ou -) et $\tilde{f}(0) = 0$

2. Calculer la fonction dérivée f' de f.

   f est dérivable en tant que fonction dérivable sur son ensemble de définition.

   $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe C^1. Pour 0, on calcule le taux d'accroissement.

   $\lim\limits_{x \to 0} \tau_0(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{e^x - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{3}{2}$

   Donc la fonction est bien dérivable en 0.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et chercher une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan. On donnera également sa position relative par rapport à $\mathcal{C}$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0$ L'asymptote $\mathcal{A}$ en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}$ est : $\mathcal{A} : y = \frac{x}{2}$

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n \qquad (*)$$

1. Montrer que l'équation $(*)$ est équivalente à : $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \sum_{k=3}^{n+2} e^{n\ln\left(\frac{k}{n}\right)}$.

Comme $n > 0$, on peut diviser l'égalité par $\frac{1}{n^n}$. On a donc :

$\frac{1}{n^n}(n+3)^n = \frac{1}{n^n}\sum_{k=3}^{n+2} k^n \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Ensuite, on utilise le fait que $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, a^b = e^{b\ln(a)}$.

On obtient bien que $(*) \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \sum_{k=3}^{n+2} e^{n\ln\left(\frac{k}{n}\right)}$.

2. Démontrer que : $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, a\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq b-a$.

On utilise l'inégalité des accroissements finis. Soit l'intervalle $I = [a,b]$ et la fonction ln. On suppose que ln est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

Dès lors , on a

$$\ln(b) - \ln(a) \leq M(b-a)$$

Où $\forall x \in I, M \geq \frac{1}{x}$. Par décroissance de la fonction inverse, on a $M = \frac{1}{a}$.

Dès lors $\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b}{a} - 1$. Comme $a > 0$, on peut multiplier l'égalité par a. Il résulte :

$$a\ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq b-a$$

3. Résoudre l'équation $(*)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Grâce à l'inégalité précédente, on peut majorer $\sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

On a $\sum_{k=3}^{n+2} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=3}^{n+2} e^{n\ln\left(\frac{k}{n}\right)} \leq \sum_{k=3}^{n+2} e^{k-n} = e^{-n}\sum_{k=3}^{n+2} e^k$

On reconnait dans le second membre une suite géométrique que l'on sait calculer.

$e^{-n}\sum_{k=3}^{n+2} e^k = e^{-n} \times e^3\left(\frac{1-e^n}{1-e}\right)$

$= \frac{e^{3-n}-e^3}{1-e}$

Lorsque $n \to +\infty$, la $\sum_{k=1}^{n+2} e^{k-n} \to -\frac{e^3}{1-e} \approx 11,69 < 12$.

Or, on a pour l'autre égalité $\left(1+\frac{3}{7}\right)^7 > 12$. Comme il s'agit d'une fonction croissante, on sait qu'il n'y a pas de solution pour $n \geq 7$. On peut se restreindre aux cas où $n \in [\![1,6]\!]$.

$n = 1 : 4 \neq 3$

$n = 2 : 25 = 25$

$n = 3 : 216 = 216$

$n = 4 : 2401 \neq 2258$

$n = 5 : 32768 \neq 25850$

$n = 6 : 531441 \neq 431274$

Il résulte que l'ensemble des solutions $\mathscr{S} = \{2, 3\}$

Problème 3

1. Montrer que pour tout $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

Le corollaire des accroissements finis *- Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$ alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

On pose le segment $[x, x+1]$ et $m = \frac{1}{x+1}$ et $M = \frac{1}{x}$. On a bien $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq f'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$. Dès lors, l'inégalité est vérifiée.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

On multiplie l'inégalité précédente par x (on peut le faire car $x > 0$).

$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \leq x[\ln(x+1) - \ln(x)] \leq 1$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)] = 1$

De plus, $x[\ln(x+1) - \ln(x)] = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

On peut, par linéarité de l'exponentielle, obtenir l'inégalité :

$$e^{1 - \frac{1}{x+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e$$

Soit $X = 1 - \frac{1}{x+1}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 1$ et donc $\lim\limits_{X \to 1} e^X = e$. Par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$.

On calcule la dérivée f'. On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Dès lors $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \left[-\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}_{\forall x, > 0}$

On cherche le signe de $u'(x)$, Or, on sait que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Ainsi, on a $\forall x > 0, f'(x) \geq 0$, il en résulte que f est croissante sur $]0, +\infty[$.

Problème 4

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la fraction continue $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que cette solution est dans $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

> $f(x) = x \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.
>
> On a $\Delta = 5 > 0$, on a deux solutions dont, une seule dans I : $\begin{cases} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in I \\ \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin I \end{cases}$.

2. Montrer que $f(I) \subset I$ et que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

> f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Dès lors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur I.
>
> De plus $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \in I$ et $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in I$.
>
> Dès lors $f(I) \subset I$
>
> De plus, $|f'(x)|$ est elle même strictement décroissante sur I, dès lors $|f'(x)| \leq f'\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

   (a) Écrire un algorithme en java `public static double suite(int n)` qui pour un rang n donné retourne la valeur de la suite u_n.

```java
public static double suite(int n) {
        if(n == 0)
                return 1.0;
        return (1 + 1.0 / suite(n-1));
}
```

   (b) Montrer que (u_n) converge vers la solution φ.

> On rappelle que si une suite (u_n) est définie par récurrence telle que $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction telle que $f : I \to I$. Alors, si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
>
> Dès lors, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$ pour montrer que la suite (u_n) converge vers la solution de l'équation précédente. Ce qui confirme que (u_n) converge vers φ.

Problème 5

Pour $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2$, on considère les fonctions f_λ telles que :

$$f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

On désigne par $\mathcal{C}_\lambda$ les courbes des fonctions f_λ.

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ sont parallèles.

> On rappelle que l'équation de la tangente T_a au point a est telle que $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
>
> La fonction est continue dérivable en tout point comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.
>
> On calcule la dérivée $f'_\lambda(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}(x)$ avec $u(x) = x+\lambda$ et $v(x) = x^2+1$.
>
> On alors : $f'_\lambda(x) = \frac{x^2+1-(x+\lambda)2x}{(x^2+1)^2}$
>
> On obtient la famille de tangentes $(\mathcal{T}_{0,\lambda})$ telle que $(\mathcal{T}_{0,\lambda}) = \{T_0 : y = x+\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$
>
> Le coefficient directeur ne dépend par de λ, elles ont toutes le même coefficient directeur, dès lors les tangentes sont toutes parallèles.

2. Montrer que les tangentes en 1 aux courbes $\mathcal{C}_\lambda$ sont concourantes (i.e. se croisent en un point).

> On obtient la famille de tangentes $(\mathcal{T}_{1,\lambda})$ telle que $(\mathcal{T}_{1,\lambda}) = \left\{T_1 : y = \frac{1}{2}\left(-\lambda x + 1 + 2\lambda\right) | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
>
> On cherche un point $M(x, y)$ qui appartient à la famille à la famille de tangente en 1 $(\mathcal{T}_{1,\lambda})$ de f_λ.
>
> On a alors : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, M \in (\mathcal{T}_{1,\lambda}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, 2y + \lambda x - 1 - 2\lambda = 0$
>
> $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lambda(x-2) + 2y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$
>
> Il résulte que toutes les droites de $(\mathcal{T}_{1,\lambda})$ passent par le point $M(2, {}^1\!/_2)$.

Problème 6

On définit la fonction f en posant $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?

> $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$

2. La fonction f est-elle paire ? Impaire ?

> - Une fonction f est *paire* $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
>
> $$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

On devine que f n'est pas paire.

- Une fonction f est *impaire* $\Leftrightarrow f(x) = -f(x)$

$$
\begin{aligned}
-f(-x) &= -\tfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

Donc $f(x)$ est impaire.

3. Calculer la dérivée f' de f et en déduire que f' a le même signe que $x^2 - 12$.

$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2 - 4$

Dès lors, on a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{3x^2(x^2-4)-2x^4}{(x^2-4)} \\
&= \tfrac{x^4-12x}{(x^2-4)^2} \\
&= \tfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}
\end{aligned}
$$

Comme $x^2 \geq 0$ et que $(x^2-4)^2 \geq 0$ également, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 12$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$, y faire figurer les limites aux différentes bornes de D_f.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Déterminer, si elle existe, l'asymptote Δ en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$

On en déduit que $\Delta : y = x$ est l'asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.