Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Mathématiques générales

*
* *

Problème 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a. On suppose de plus que f est définie au point a.
Donner la définition de la continuité de f en a et l'illustrer par une figure.

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Problème 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^3+a}{x^3-1} & \text{si } x \neq 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que, indépendamment du choix de a et b, la fonction f admet une droite asymptote Δ en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

Problème 4

Étudier la continuité de la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x - E(x)} - E(x) \end{cases}$$

On rappelle que $E(x)$ est la fonction *partie entière* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq E(x) < x + 1$.

Problème 5

On appelle *fonction caractéristique* χ_F d'un sous-ensemble $F \subset E$, une fonction :

$$\chi_F : \begin{cases} E \to & \{0,1\} \\ x \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe toujours un nombre rationnel.

   On pourra utiliser l'axiome d'Archimède qui énonce que :

   Axiome d'Archimède - *Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, (0 < x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} | n \times x > y)$$

2. Montrer que la fonction caractéristique de $\chi_{\mathbb{Q}}$ pour $E = \mathbb{R}$ est discontinue en chacun de ses points.

Problème 6

Soit un polynôme P tel que $\deg(P)$ est impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Problème 7

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes ainsi que la limite en α.

1. $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $\alpha = 0$
2. $f_2(x) = 1 - x - 2x \ln|x|$, $\alpha = 0$
3. $f_3(x) = \frac{|x|-2}{x^2-4}$, $\alpha = 2$
4. $f_4(x) = \ln(\sqrt{x}+1) - \ln(x)$, $\alpha = +\infty$
5. $f_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = 0$
6. $f_6(x) = \frac{x^2+2|x|}{x}$, $\alpha = 0$
7. $f_7(x) = \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6}$, $\alpha = 2$
8. $f_8(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)$, $\alpha = 0$

Problème 8

Soit f une fonction continue croissante $f : [a,b] \to [a,b]$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.