

Tutorat mathématiques : TD5

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

*Mathématiques générales**
* ***Problème 1**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de a . On suppose de plus que f est définie au point a .

Donner la définition de la continuité de f en a et l'illustrer par une figure.

La *continuité* est une notion de topologie qui énonce que : pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, une fonction réelle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Cela veut dire que si l'on se fixe un seuil ε aussi petit que l'on veut, on peut toujours trouver un intervalle autour de a tel que $f(x)$ soit à une distance inférieure à ε de $f(a)$.

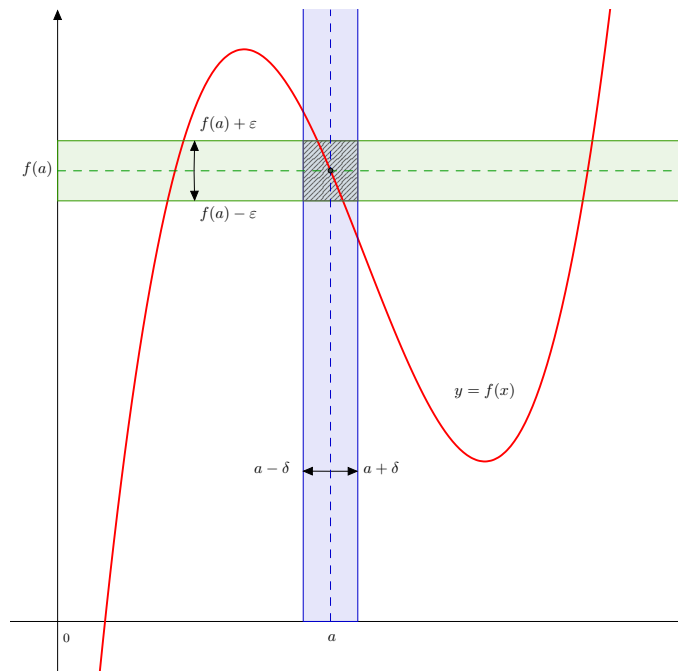


FIGURE 1 : Illustration de la continuité au point a de la fonction f

Problème 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Si $f(2x) = f(x)$ alors,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right),$$

⋮

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

On a finalement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$.

Donc, par continuité de f en 0, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$

Mais, on sait que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

Par unicité de la limite, on a

$$f(x) = f(0)$$

Comme ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, il résulte que la fonction f est constante.

Problème 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Montrer que, indépendamment du choix de a et b , la fonction f admet une droite asymptote Δ en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.

On cherche $\Delta = \alpha x + \beta$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \Delta = 0$.

En établissant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, il vient immédiatement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x + 2$, on en déduit que $\Delta = x + 2$.

Dans la forme, on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \beta$.

2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} .

Les fonctions $N(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ et $D(x) = x^3 - 1$ (respectivement numérateur et dénominateur de f) sont continues sur \mathbb{R} et le polynôme D ne s'annule qu'en 1, ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction f sera continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + a}{x^3 - 1} = b$$

Cette configuration force le polynôme N à s'annuler également en 1 pour compenser D .

$$N(1) = 0 \Leftrightarrow a = -3.$$

Ainsi, on a $N(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 3x + 3)$ et $D(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{x^2 + x + 1} = \frac{10}{3} = b$$

Finalement, f est continue sur \mathbb{R} si et seulement si $a = -3$ et $b = \frac{10}{3}$.

Problème 4

Étudier la continuité de la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x - E(x)} - E(x) \end{cases}$$

On rappelle que $E(x)$ est la fonction *partie entière* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq E(x) < x + 1$

Le fonction est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ puisque la partie entière est constante au voisinage d'un tel réel.

Étudions la situation en un entier $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a :

- $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n$
- $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1$

On a donc :

- $\lim_{x \rightarrow n^+} \sqrt{x - E(x)} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow n^-} \sqrt{x - E(x)} = 1$

On ajoute la dernière partie entière pour compléter la fonction f .

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} \sqrt{x - E(x)} + E(x) = n$$

et

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} \sqrt{x - E(x)} + E(x) = n$$

Les limites sont égales à gauche et à droite et valent n . Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dès lors f est continue sur \mathbb{R} .

Problème 5

On appelle *fonction caractéristique* χ_F d'un sous-ensemble $F \subset E$, une fonction :

$$\chi_F : \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \end{cases}$$

1. Démontrer que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe toujours un nombre rationnel.

On pourra utiliser la propriété d'Archimède qui énonce que :

Axiome d'Archimède - *Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, (0 < x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} | n \times x > y)$$

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Il s'agit d'exhiber un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $a < \frac{p}{q} < b$. En appliquant la propriété d'Archimède, on voit qu'il existe un entier q tel que

$$\frac{1}{b-a} < q$$

En prenant $y = 1$ et $x = \frac{1}{b-a}$.

On obtient par le suite

$$qa + 1 < qb$$

Soit p le plus petit entier relatif tel que $p > qa$. On a alors

$$p - 1 < qa < p$$

Donc $p \leq qa + 1$ et $qa < p \leq qa + 1 < qb$. En divisant par q on obtient le résultat voulu.

2. Montrer que la fonction caractéristique de $\chi_{\mathbb{Q}}$ pour $E = \mathbb{R}$ est discontinue en chacun de ses points.

Soit $a \in \mathbb{Q}$ (respectivement $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Pour tout réel $\delta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel (respectivement rationnel) x dans $]a - \delta, a + \delta[$ et on a $|\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en tout point de \mathbb{R} .

Problème 6

Soit un polynôme P tel que $\deg(P)$ est impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Si P est de degré impair, alors on a de suite que :

- $\lim_{X \rightarrow +\infty} P(X) = +\infty$
Ainsi, $\exists A > 0$ tel que $P(A) > 0$.
- $\lim_{X \rightarrow -\infty} P(X) = -\infty$
Ainsi, $\exists A' < 0$ tel que $P(A') < 0$.

Un polynôme est continu sur son ensemble de définition. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui nous assure l'existence d'un réel $a \in [A', A]$ sur lequel P s'annule.

Problème 7

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes ainsi que la limite en α .

1. $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $\alpha = 0$

$$D_{f_1} = \mathbb{R}^*$$

Par la formule du taux d'accroissement, on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

$$\text{Dès lors ici } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$$

2. $f_2(x) = 1 - x - 2x \ln|x|$, $\alpha = 0$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}^*$$

On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = x$.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $X \rightarrow +\infty$. De même lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $X \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{On note que } x \ln|x| &= \frac{1}{X} \ln \left| \frac{1}{X} \right| \\ &= -\frac{1}{X} \ln|X| \\ &= -\frac{\ln|X|}{X} \end{aligned}$$

On a déjà démontré que $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln|X|}{X} = 0$. (Ici, la valeur absolue nous permet d'assurer la continuité à gauche et à droite).

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$$

$$\text{On conclut que } \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1$$

3. $f_3(x) = \frac{|x|-2}{x^2-4}$, $\alpha = 2$

$$D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Comme $2 > 0$, on peut établir que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|-2}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \ln(\sqrt{x} + 1) - \ln(x)$, $\alpha = +\infty$

$$D_{f_4} = \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{On a } f_4(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 0$$

Par composition des limites, il vient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = -\infty$.

5. $f_5(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha = 0$

$$D_{f_5} = \mathbb{R}^*$$

Par définition, on a $\frac{1}{x} \leq E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} + 1$

- On considère x positif, dès lors :

$$1 \leq f_5(x) < 1 + x$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, par le théorème de gendarmes, il résulte immédiatement que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x) = 1$

- On considère x négatif, dès lors :

$$1 \geq f_5(x) > 1 + x$$

De même, lorsque $x \rightarrow 0^-$, il résulte que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_5(x) = 1$

On a alors $\lim_{x \rightarrow 0} f_5(x) = 1$

6. $f_6(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x}$, $\alpha = 0$

$$D_{f_6} = \mathbb{R}^*$$

On peut simplifier l'expression de $f_6(x)$ telle que $f_6(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 0 \\ x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -2$. Dès lors, la fonction n'est pas continue.

7. $f_7(x) = \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}$, $\alpha = 2$

$$D_{f_7} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$$

En factorisant le dénominateur, on a $f_7(x) = \frac{e^x - e^2}{(x-2)(x+3)}$

$$= \frac{e^x - e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de e^x en 2 : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = e^2$

Dès lors $\lim_{x \rightarrow 2} f_7(x) = \frac{e^2}{5}$

8. $f_8(x) = \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1)$, $\alpha = 0$

$$D_{f_8} = \mathbb{R}^*$$

En modifiant un peu l'expression de f_8 , on a :

$$f_8(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)(\sqrt{1+x+x^2}+1)}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1^2}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{x(x+1)}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \right) \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \end{aligned}$$

Il vient que $\lim_{x \rightarrow 0} f_8(x) = \frac{1}{2}$

Problème 8

Soit f une fonction continue croissante $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Soit E l'ensemble défini tel que $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}$. $E \neq \emptyset$ car $a \in E$, en particulier a minore f et b majore f . Donc E admet une borne supérieure c telle que $a \leq c \leq b$.

Montrons que $f(c) = c$.

Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E \mid b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ et que les x_n sont dans E pour tout $n \neq 0$.

On a alors

$$x_n \leq f(x_n) \leq b \quad (*)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, la suite $x_n \rightarrow b$ par le théorème des gendarmes. La fonction f étant croissante, il vient que $f(x_n) \rightarrow f(b^-) \leq f(b)$.

En se remplaçant dans l'équation (*), il vient que $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$ et donc que $f(b) = b$.

Finalement, dans ce cas, b est un point fixe.

Par une technique analogue, on montre bien que si $c \in [a, b[$, on a bien $f(c) = c$.