Tutorat logique : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

L'opérateur $Nand$ noté $\uparrow$ est un opérateur très utilisé en électronique et dans la réalisation des micro-processeurs car il forme un système complet de connecteurs à lui seul.
On rappelle que sa table de vérité est telle que :

x	y	$x \uparrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Son symbole associé en électronique est :

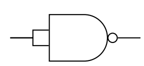


Figure 1 : Porte logique de l'opérateur $\uparrow$ Nand

1. Exprimer l'opérateur "ou exclusif" noté $\oplus$ à l'aide des opérateurs classiques puis uniquement en utilisant Nand.
2. On considère la modélisation de l'opérateur $\oplus$ suivante :

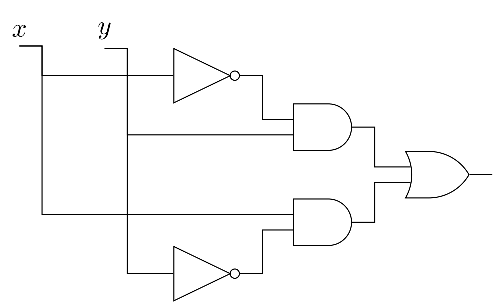


Figure 2 : Circuit logique de l'opérateur $\oplus$ ou exclusif

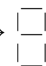
Expliquer pourquoi cette solution n'est pas satisfaisante. Proposer un circuit logique à l'aide de Nand. Pourquoi cette modélisation est meilleure ?

Problème 2

Soit un chiffre $x \in [\![0, 9]\!]$.

1. Donner la représentation binaire de x.
2. On considère un vecteur booléen (A, B, C, D) permettant de représenter x en binaire. On souhaite réaliser un affichage de calculatrice tel que :

$$(A, B, C, D) \longrightarrow \Phi \longrightarrow$$



Donner la fonction associée à chaque segment de l'affichage puis l'écriture de la fonction Φ.

Problème 3

Simplifier algébriquement les expressions suivantes :

1. $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
2. $(A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C)$
3. $A \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge D \neg E) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E) \vee (B \wedge \neg C \wedge D \neg E) \vee (\neg A \wedge C \wedge D)$

Problème 4

Soient a, b, c et d quatre variables booléennes. On considère les formules logiques Φ et Ψ définies telles que :

- $\Phi \equiv 1$ si et seulement si $a + b \leq c + d$. Avec "+" représentant l'addition usuelle
- $\Psi \equiv 1$ si et seulement si l'entier dont l'écriture en base 2 de $abcd$ est strictement inférieur à 10.

À l'aide des tableaux de Karnaugh, donner l'expression la plus simple de Φ et Ψ.

Problème 5

On considère la formule logique suivante : $\varphi \equiv [(\neg a \vee b) \wedge c] \Leftrightarrow [a \oplus c]$

1. Exprimer φ sous forme normale disjonctive puis sous forme normale conjonctive.
2. À 'aide des tableaux de Karnaugh, simplifier les expressions obtenues.

Problème 6

On donne la définition récursive du nombre de connecteurs dans une formule propositionnelle et du nombre de sous-formules atomiques avec $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ telle que :

$\texttt{nbSymb}(P) = 0$ Si P est atomique

$\texttt{nbSymb}(\neg P) = 1 + \texttt{nbSymb}(P)$

$\texttt{nbSymb}(P \circ Q) = 1 + \texttt{nbSymb}(P) + \texttt{nbSymb}(Q)$

$\texttt{nbAtom}(P) = 1$ Si P est atomique

$\texttt{nbAtom}(\neg P) = \texttt{nbAtom}(P)$

$\texttt{nbAtom}(P \circ Q) = \texttt{nbAtom}(P) + \texttt{nbAtom}(Q)$

1. Donner les équations récursives qui définissent une fonction `nbNeg` qui compte le nombre de symboles $\neg$ dans une formule.
2. Montrer par récurrence structurelle que pour toute formule P ne contenant pas l'opérateur $\neg$ la propriété $\Phi(P)$: $\texttt{nbAtom}(P) = \texttt{nbSymb}(P) + 1$ est vraie. On montrera que pour toutes formules A, B ne contenant pas l'opérateur $\neg$, on a bien $\Phi(A, B)$: $\texttt{nbAtom}(A \circ B) = \texttt{nbSymb}(A \circ B) + 1$.
3. Montrer à l'aide d'un exemple que le résultat n'est plus vrai lorsque la formule P contient des symboles $\neg$.