Tutorat logique : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

1. On considère le raisonnement R_1 suivant :

   (1) : "Si la rivière est polluée alors les poissons meurent."
   (2) : "Les poissons meurent."
   (C) : "Donc, la rivière est polluée."

   Ce raisonnement est-il correct ? Formaliser-le en logique propositionnelle et démontrer sa correction ou son incorrection par le méthode de votre choix.

2. On considère désormais le raisonnement R_2 suivant :

   (1) : "Si la rivière déborde, alors il y'a des inondations."
   (C) : "Donc, s'il n'y a pas d'inondations, alors la rivière ne déborde pas."

   Même question que précédemment.

Problème 2

1. Modéliser le principe de raisonnement par l'*absurde* en logique propositionnelle et démontrer sa validité.

2. Démontrer le principe de *contraposition* mathématique.

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

Problème 3

Soient φ_1 et φ_2, deux formules de la logique propositionnelle. Démontrer la proposition suivante :

$$\varphi_1 \models \varphi_2 \textit{ si et seulement si } \models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$$

Problème 4

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis démontrer.

1. Il existe une formule satisfaisable dont la négation est satisfaisable.

2. Il existe une tautologie dont la négation est satisfaisable.

3. L'unique connecteur unaire existant en logique propositionnelle est $\neg$.

4. Toute formule admet au moins un modèle.

5. Le système de connecteurs $\{\neg, \Rightarrow\}$ est complet.

Problème 5

Traduire les énoncés suivants en logique propositionnelle et dire s'ils sont vrais dans le domaine d'interprétation du monde réel.

1. Pour que les souris soient des oiseaux, il faut qu'elles aient des ailes.
2. 1 est égale à 4 si et seulement si 1 est égale à 2.
3. Pour qu'un oeuf réussisse le cours de logique, il ne suffit pas qu'il assiste au cours.
4. Une porte est ouverte ou fermée.

Problème 6

On dit qu'une formule propositionnelle est sous *forme minimale* si elle se réduit au système de connecteurs $\{\Rightarrow, \bot\}$.
On veut montrer que toute formule $\varphi \in \mathcal{L}$ admet une forme minimale équivalente.

1. Montrer que les formules $p \Rightarrow \bot$ et $\neg p$ sont logiquement équivalentes.
2. Sachant que les formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont logiquement équivalentes, donner une formule équivalente à $p \vee q$ en forme minimale.
3. On s'intéresse à l'opérateur $\wedge$.
   (a) Donner la table de vérité de la formule $((p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$ et la comparer à $p \wedge q$.
   (b) En déduire une formule logiquement équivalente à $\neg p \wedge q$ sous forme minimale.
4. Déduire des questions précédentes une fonction `min` qui transforme toute formule φ de la logique propositionnelle en une formule équivalente sous forme minimale.

Problème 7

Soient les trois énoncés suivants :

p : *"Demain il pleut."*
q : *"Aujourd'hui il fait beau."*
r : *"Un jour, il neigera."*

Traduire en langue naturelle le plus adéquatement possibles les énoncés logiques suivants :

1. $\neg q \Rightarrow p$
2. $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$
3. $\neg(q \Rightarrow r)$
4. $r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

Problème 8

On considère l'ensemble de formules $\Gamma = \{t \vee p \vee \neg r, \neg t \vee q \vee \neg s\}$ et la formule $\varphi \equiv p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$.
Montrer que $\Gamma \models \varphi$.

Problème 9

Donner des interprétations qui rendent faux les énoncés suivants puis un modèle de ceux-ci.

1. $r \wedge \neg p \Rightarrow (q \vee (r \Rightarrow p))$
2. $[q \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow p)] \vee \neg r \vee p$
3. $\neg(p \oplus q) \wedge (r \Leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$