Tutorat logique : TD1

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

1. On considère le raisonnement R_1 suivant :

   (1) : "Si la rivière est polluée alors les poissons meurent."

   (2) : "Les poissons meurent."

   (C) : "Donc, la rivière est polluée."

   Ce raisonnement est-il correct ? Formaliser-le en logique propositionnelle et démontrer sa correction ou son incorrection par le méthode de votre choix.

   > Le raisonnement est incorrect. On représente par p la proposition *"La rivière est polluée."* et m la proposition *"Les poissons meurent."*. Le raisonnement se traduit alors tel que :
   >
   > *(1)* : $p \Rightarrow m$
   >
   > *(2)* : m
   >
   > *(C)* : p
   >
   > On a alors le raisonnement $R_1 \equiv ((p \Rightarrow m) \wedge m) \Rightarrow p$. En appliquant la valuation $V(p) = 0$ et $V(m) = 1$, on a $R_1 \equiv 0$, ce qui confirme que le raisonnement est invalide.

2. On considère désormais le raisonnement R_2 suivant :

   (1) : "Si la rivière déborde, alors il y'a des inondations."

   (C) : "Donc, s'il n'y a pas d'inondations, alors la rivière ne déborde pas."

   Même question que précédemment.

   > Le raisonnement est correct. On représente par d la proposition *"La rivière est déborde."* et par i la proposition *"Il y'a des inondations."*. Le raisonnement se traduit alors tel que :
   >
   > *(1)* : $d \Rightarrow i$
   >
   > *(C)* : $\neg i \Rightarrow \neg d$
   >
   > On a alors le raisonnement $R_2 \equiv (d \Rightarrow i) \Rightarrow (\neg i \Rightarrow \neg d)$. Simplifions$R_2$:
   >
   > $R_2 \equiv (d \Rightarrow i) \Rightarrow (\neg i \Rightarrow \neg d)$

$\equiv \neg(d \Rightarrow i) \vee (\neg i \Rightarrow \neg d)$

$\equiv \neg(\neg d \vee i) \vee (i \vee \neg d)$ *En posant* $\varphi = \neg d \vee i$

$\equiv \neg\varphi \vee \varphi$

$\equiv \top$

Problème 2

1. Modéliser le principe de raisonnement par l'*absurde* en logique propositionnelle et démontrer sa validité.

Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce qu'on veut démontrer et à en déduire une contradiction. En logique propositionnelle, si on veut démontrer la validité d'une formule φ, alors on suppose $\neg\varphi$ et on en déduit le faux. C'est un raisonnement valide car on a bien que φ est valide si et seulement si $\neg\varphi \Rightarrow \bot$ est valide. En effet, $\neg\varphi \Rightarrow \bot$est valide, si et seulement si, $\neg\neg\varphi \vee \bot$ est valide, si et seulement si, $\neg\neg\varphi$ est valide, c'est-à-dire, si et seulement si φ est valide.

2. Démontrer le principe de *contraposition* mathématique.

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

On peut le montrer par la méthode des tables de vérité.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Le résultat des deux tables est identique. L'équivalence est vérifiée.

Problème 3

Soient φ_1 et φ_2, deux formules de la logique propositionnelle. Démontrer la proposition suivante :

$$\varphi_1 \models \varphi_2 \textit{ si et seulement si } \models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$$

On suppose que $\varphi_1 \models \varphi_2$, on souhaite montrer que $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, c'est-à-dire, montrer que pour toute interprétation I, on a $I(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \top$.

Or $I(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = I(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$= I(\neg\varphi_1) \vee (\varphi_2)$

$= \neg I(\varphi_1) \vee (\varphi_2)$

Si $I(\varphi_1) = \perp$, alors on a bien $I(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \top$. Sinon, si $I(\varphi_1) = \top$, par hypothèse que $\varphi_1 \models \varphi_2$, on a forcément $I(\varphi_2) = \top$ et donc on a encore une fois $I(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \top$.
Réciproquement, supposons que $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ et montrons que $\varphi_1 \models \varphi_2$. Soit I une interprétation telle que $I(\varphi_1) = \top$, puisque par hypothèse on a $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, il vient obligatoirement par la table de vérité de l'implication que $I(\varphi_2) = \top$.
On a montré les deux implications, la proposition est donc vraie.

Problème 4

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis démontrer.

1. Il existe une formule satisfaisable dont la négation est satisfaisable.

   Cette assertion est *vraie*. On a bien un modèle pour φ et un modèle pour $\neg\varphi$.

2. Il existe une tautologie dont la négation est satisfaisable.

   Cette assertion est *fausse*. Un formule $\tau \in \mathcal{L}$ est une tautologie si et seulement si τ est vraie pour toute interprétation I. Ainsi, supposons que l'on ait $I(\neg\tau) = 1$, alors par définition de la négation on a $I(\tau) = 0$. On arrive à une contradiction, l'hypothèse de départ est absurde.

3. L'unique connecteur unaire existant en logique propositionnelle est $\neg$.

   Cette assertion est *fausse*. On peut définir $2^2 = 4$ connecteurs unaires en logique propositionnelle. La négation, notée classiquement "$\neg$" et les trois autres connecteurs : identité, toujours faux, toujours vrai.

4. Toute formule admet au moins un modèle.

   Cette assertion est *fausse*. Les contradictions n'admettent aucun modèle par définition.

5. Le système de connecteurs $\{\neg, \Rightarrow\}$ est complet.

   Cette assertion est *vraie*. On admet que l'ensemble $\{\neg, \vee, \wedge\}$ forme un système complet de connecteurs.

   On cherche à exprimer $\vee$ et $\wedge$ à l'aide de l'ensemble $\{\neg, \Rightarrow\}$. Soient P et Q deux formules propositionnelles.

   - $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \equiv P \wedge Q$
   - $\neg P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q$

   On a réussi à se ramener à un système complet de connecteur connu.

Problème 5

Traduire les énoncés suivants en logique propositionnelle et dire s'ils sont vrais dans le domaine d'interprétation du monde réel.

1. Pour que les souris soient des oiseaux, il faut qu'elles aient des ailes.

> p : Les souris sont des oiseaux.
>
> q : Les souris ont des ailes.
>
> $p \Rightarrow q$: Comme les souris ne sont pas des oiseaux et n'ont pas d'aile, cet énoncé est *vrai*.

2. 1 est égale à 4 si et seulement si 1 est égale à 2.

> $p : 1 + 1 = 4$.
>
> $q : 1 = 2$.
>
> $p \Leftrightarrow q$: Cet énoncé est *vrai*.

3. Pour qu'un oeuf réussisse le cours de logique, il ne suffit pas qu'il assiste au cours.

> p : Un oeuf réussit le cours de logique.
>
> q : Un oeuf assiste au cours.
>
> $\neg(q \Rightarrow p)$: L'énoncé est *faux*, mais il est vrai si vous emmenez un oeuf en cours de logique.

4. Une porte est ouverte ou fermée.

> p : La porte est ouverte.
>
> q : La porte est fermée.
>
> $p \oplus q$: C'est un énoncé *indécidable*.

Problème 6

On dit qu'une formule propositionnelle est sous *forme minimale* si elle se réduit au système de connecteurs $\{\Rightarrow, \bot\}$.

On veut montrer que toute formule $\varphi \in \mathcal{L}$ admet une forme minimale équivalente.

1. Montrer que les formules $p \Rightarrow \bot$ et $\neg p$ sont logiquement équivalentes.

> On sait que $p \Rightarrow \bot \equiv \neg p \vee \bot$. Dès lors, $p \Rightarrow \bot \equiv \neg p$.

2. Sachant que les formules $p \Rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont logiquement équivalentes, donner une formule équivalente à $p \vee q$ en forme minimale.

> Par linéarité de $\neg$, on déduit que $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$. Dès lors, on a $p \vee q \equiv (p \Rightarrow \bot) \Rightarrow q$.

3. On s'intéresse à l'opérateur $\wedge$.

   (a) Donner la table de vérité de la formule $((p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$ et la comparer à $p \wedge q$.

p	q	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot))$	$((p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

La table de vérité de la formule $((p \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$ est équivalente à celle de $p \wedge q$.

(b) En déduire une formule logiquement équivalente à $\neg p \wedge q$ sous forme minimale.

On a $(((p \Rightarrow \bot) \Rightarrow (q \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \equiv \neg p \wedge q$. Par simplification, on a aussi $(q \Rightarrow p) \Rightarrow \bot$.

4. Déduire des questions précédentes une fonction `min` qui transforme toute formule φ de la logique propositionnelle en une formule équivalente sous forme minimale.

On considère l'ensemble de règles suivant :

$\texttt{min}(\bot) = \bot$

$\texttt{min}(\top) = \bot \Rightarrow \bot$

$\texttt{min}(p) = p$

$\texttt{min}(\neg P) = \texttt{min}(P) \Rightarrow \bot$

$\texttt{min}(P \vee Q) = (\texttt{min}(P) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \texttt{min}(Q)$

$\texttt{min}(P \wedge Q) = (\texttt{min}(P) \Rightarrow (\texttt{min}(Q) \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$

$\texttt{min}(P \Rightarrow Q) = \texttt{min}(P) \Rightarrow \texttt{min}(Q)$

Problème 7

Soient les trois énoncés suivants :

p : *“Demain il pleut.”*

q : *“Aujourd'hui il fait beau.”*

r : *“Un jour, il neigera.”*

Traduire en langue naturelle le plus adéquatement possibles les énoncés logiques suivants :

1. $\neg q \Rightarrow p$

S'il ne fait pas beau aujourd'hui, alors demain, il pleut.

2. $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$

Si aujourd'hui il pleut ou que demain il ne pleut pas, alors c'est sûr, un jour il neigera.

3. $\neg(q \Rightarrow r)$

Pour qu'un jour il neige, il ne suffit pas qu'il fasse beau aujourd'hui.

4. $r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

Si un jour il neige, alors il fait beau aujourd'hui ou il pleut demain, mais certainement pas les deux.

Problème 8

Donner des interprétations qui rendent faux les énoncés suivants puis un modèle de ceux-ci.

1. $r \wedge \neg p \Rightarrow (q \vee (r \Rightarrow p))$

   La formule est fausse avec la valuation $V(r) = \bot$.

   On rend la formule vraie par l'interprétation affectant la valuation suivante $V(r) = \top, V(p) = \top$.

2. $[q \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow p)] \vee \neg r \vee p$

   La formule est fausse avec la valuation $V(r) = \top, V(p) = \bot, V(q) = \bot$.

   On rend la formule vraie par l'interprétation affectant la valuation suivante $V(r) = \bot, V(p) = \top, V(q) = \top$.

3. $\neg(p \oplus q) \wedge (r \Leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   La formule est fausse avec la valuation $V(p) = \top, V(q) = \top$.

   On rend la formule vraie par l'interprétation affectant la valuation suivante $V(p) = \bot, V(q) = \bot, V(r) = \bot$.

Problème 9

On considère l'ensemble de formules $\Gamma = \{t \vee p \vee \neg r, \neg t \vee q \vee \neg s\}$ et la formule $\varphi \equiv p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$. Montrer que $\Gamma \models \varphi$.

Le symbole "$\models$" est celui de la conséquence sémantique, c'est-à-dire dans notre cas que l'ensemble de formules Γ implique sémantiquement la formule φ. Ainsi, il est question de montrer que pour toute interprétation I rendant vraie Γ alors I rend également vraie φ.
Posons $\Gamma = \{C_1, C_2\}$, on suppose alors $I(C_1 \wedge C_2) = \top$, et on considère les deux cas suivants, étant donné que l'intersection des variables propositionnelles de C_1 et C_2 se réduit à $\{t\}$:

1. Si $V(t) = \bot$ alors $I(C_2) = \top$, on déduit alors que $I(p \vee \neg r) = \top$ et donc $I(\varphi) = \top$.
2. Si $V(t) = \top$ alors $I(C_1) = \top$, on déduit alors que $I(q \vee \neg s) = \top$ et donc $I(\varphi) = \top$.

Dans les deux cas, on a bien $I(\varphi) = \top$. On a montré que $\Gamma \models \varphi$.