Tutorat logique : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

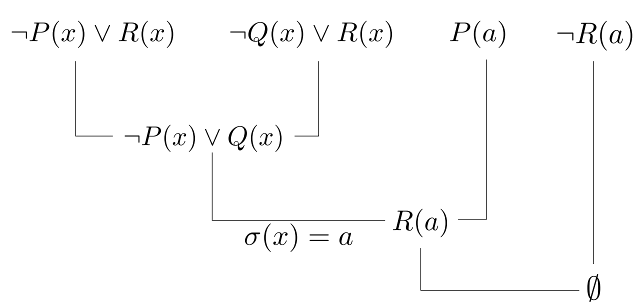
Problème 1

Les énoncés sont indépendants.

1. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_1 = \{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow R(x))\}$$

Et la formule $C \equiv \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow R(x))$. A-t-on $\mathcal{F}_1 \models C$?

> Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F}_1 = \{\theta_1, \theta_2\}$ avec :
>
> $\theta_1 \equiv \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \neg P(x) \vee Q(x)$
>
> $\theta_2 \equiv \neg Q(x) \vee R(x)$
>
> $\neg C \equiv \neg \forall x \cdot (P(x) \Rightarrow R(x)) \equiv P(a) \wedge \neg R(a)$
>
> On obtient l'arbre de résolution suivant :
>
> 
>
>
> Dès lors, le raisonnement est valide, on a bien C conséquences logiques des prémisses établies dans $\mathcal{F}_1$.

2. Soit l'ensemble de formules :

$$\mathcal{F}_2 = \{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y)), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x))\}$$

Et la formule $C \equiv \exists x \cdot (\neg Q(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y))$. A-t-on $\mathcal{F}_2 \models C$?

Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F}_2 = \{\pi_1, \pi_2\}$ avec :

$\pi_1 \equiv \forall x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y) \equiv \neg P(x) \vee P(y)$

$\pi_2 \equiv \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x)) \equiv P(x) \vee Q(x)$

$\neg C \equiv \neg(\exists x \cdot \neg Q(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y)) \equiv \neg \exists \cdot Q(x) \wedge \neg \forall y \cdot P(y) \equiv \neg Q(x) \wedge P(f(x))$

On obtient l'arbre de résolution suivant :

$$\neg P(x) \vee P(y) \qquad P(x) \vee Q(x) \qquad \neg Q(x) \qquad \neg P(f(x))$$

$$P(x)$$

$$\underset{\sigma(x) = f(x)}{\emptyset}$$

Dès lors, le raisonnement est valide, on a bien C conséquences logiques des prémisses établies dans $\mathcal{F}_2$.

3. Soient les énoncés suivants :

   $\Psi_1 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (F(x,y) \wedge F(y,z)) \Rightarrow G(x,z))$

   $\Psi_2 \equiv \forall x \cdot \exists y \cdot F(y,x)$

   $\Psi_3 \equiv \neg \forall x \cdot \exists y \cdot G(y,x)$

   L'ensemble $\mathcal{F}_3 = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est-il cohérent ?

$\Psi_1 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot (F(x,y) \wedge F(y,z)) \Rightarrow G(x,z)) \equiv \neg F(x,y) \vee \neg F(y,z) \vee G(x,z)$

$\Psi_2 \equiv \forall x \cdot \exists y \cdot F(y,x) \equiv F(f(x'), x')$ *On renomme pour éviter les collisions de variables*

$\Psi_3 \equiv \neg \forall x \cdot \exists y \cdot G(y,x) \equiv \neg G(y', a)$

$\mathcal{F}_3 = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est cohérent $\Leftrightarrow \bigwedge_{\Psi_i \in \mathcal{F}_3} \Psi_i \neq \perp$

On cherche les résolvantes :

$\Psi_3 \wedge \Psi_1$ avec les substitutions $\sigma(z) = a$, $\sigma(x) = y'$:$\Psi_4 \equiv \neg F(y', y) \vee \neg F(y, a)$

$\Psi_4 \wedge \Psi_2$ avec les substitutions $\sigma(x') = a$, $\sigma(y) = f(x')$:$\Psi_5 \equiv F(y', f(a))$

$\Psi_5 \wedge \Psi_2$ avec les substitutions $\sigma(x') = f(a)$, $\sigma(y') = f(f(a))$: $\perp$

Dès lors $\mathcal{F}_3$ est incohérent.

Problème 2

Soient les énoncés suivants Φ_i du raisonnement R :

Φ_1 *: Pour tout crime, il y'a un quelqu'un qui l'a commis.*

Φ_2 *: Il y'a uniquement les gens malhonnêtes qui commettent des crimes.*

Φ_3 *: Ne sont arrêtés que les gens malhonnêtes.*

Φ_4 *: Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes.*

Φ_5 *: Il y'a des crimes.*

C *: Il y'a des gens malhonnêtes non arrêtés.*

On définit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{Cr, M, A, C\}$: *Cr(x)* d'arité 1 vrai si x est un crime, *M(y)* d'arité 1 vrai si y est malhonnête, *A(y)* vrai si y est arrêté et *C(x,y)* d'arité 2 vrai si y a commis le crime x.

1. Représenter en logique des prédicats les énoncés Φ_i et C.

   $\Phi_1 \equiv \forall x \cdot (Cr(x) \Rightarrow \exists y C(x,y))$

   $\Phi_2 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot [(Cr(x) \wedge C(x,y)) \Rightarrow M(y)]$

   $\Phi_3 \equiv \forall y \cdot (A(y) \Rightarrow M(y))$

   $\Phi_4 \equiv \forall y \cdot (A(y) \wedge M(y)) \Rightarrow \neg \exists x \cdot (Cr(x) \wedge \neg C(x,y))$

   $\Phi_5 \equiv \exists x \cdot Cr(x)$

   $C \equiv \exists y \cdot (M(y) \wedge \neg A(y))$

2. Donner la forme de Skolem correspondante aux énoncés Φ_i et C respectifs.

   $\Phi_1 \equiv \forall x \cdot (\neg Cr(x) \vee \exists y \cdot C(x,y)) = \neg Cr(x) \vee C(x, f(x)))$

   $\Phi_2 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot [((Cr(x) \wedge C(x,y)) \Rightarrow M(y)] \neg Cr(x) \vee \neg C(x,y) \vee M(y)$

   $\Phi_3 \equiv \forall y \cdot (A(y) \Rightarrow M(y)) = \neg A(y) \vee M(y)$

   $\Phi_4 \equiv \forall y \cdot (A(y) \wedge M(y)) \Rightarrow \neg \exists x \cdot (Cr(x) \wedge \neg C(x,y)) = \neg A(y) \vee \neg M(y) \vee \neg Cr(x) \vee \neg C(x,y)$

   $\Phi_5 \equiv Cr(a)$

3. A-t-on $\bigcup_{\Phi_i \in R} \Phi_i \models C$? Le montrer par résolution.

   Le raisonnement R est cohérent si et seulement si $\bigwedge_{\Phi_i \in R} \Phi_i \wedge \neg C = \bot$

   $\Phi_c \equiv \neg C \equiv \neg(\exists y \cdot (M(y) \wedge \neg A(y)) = \neg M(y) \vee A(y)$

   On construit les résolvantes par coupure et unification (équivalent de la résolution en arbre) :

   $\Phi_1 \wedge \Phi_5$ avec la substitution $\sigma(x) = a$: $\Phi_6 \equiv C(a, f(a))$

   $\Phi_6 \wedge \Phi_2$ avec la substitution $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$: $\Phi_7 \equiv \neg Cr(a) \vee M(f(a))$

   $\Phi_7 \wedge \Phi_5$: $\Phi_8 \equiv M(f(a))$

   $\Phi_6 \wedge \Phi_4$ avec la substitution $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(a)$: $\Phi_9 \equiv \neg A(f(a)) \vee \neg M(f(a)) \vee \neg Cr(a)$

   $\Phi_5 \wedge \Phi_9$: $\Phi_{10} \equiv \neg A(f(a)) \vee \neg M(f(a))$

   $\Phi_8 \wedge \Phi_{10}$: $\Phi_{11} \equiv \neg A(f(a))$

   $\Phi_c \wedge \Phi_{11}$ avec la substitution $\sigma(y) = f(a)$: $\Phi_{12} \equiv \neg M(f(a))$

   $\Phi_8 \wedge \Phi_{12}$: $\bot$

   On arrive à une contradiction ce qui montre que le raisonnement est bien valide.

Problème 3

1. On définit la suite de Fibonacci $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} \mathcal{F}_{n+2} & = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_0 & = 0 \\ \mathcal{F}_1 & = 1 \end{cases}$

   Écrire en Prolog un programme `fib(N,R)` qui calcule le terme $\mathcal{F}_n =$ `R` pour un rang `N` donné.

   Le programme renverra par exemple :

```
[1] ?-fib(6, R)
R = 8
[2] ?-fib(6, 12)
Failure
```

On a le programme suivant en Prolog.

Algorithme 1 Suite de Fibonacci

```
% Author Clément

/********** BASE DE FAITS **********/
Fib(0,0). % Cas de base F_0
Fib(1,1). % Cas de base F_1
/***********************************/

/********* BASE DE RÉGLES **********/
fib(N,R):- N >= 2,
N1 is N - 1,
N2 is N - 2,
fib(N1,R1),
fib(N2,R2),
R is R1 + R2.
% On calcule F_{n-1} (Idem F_{n-2}) par l'appel fib(N1,R1) (Idem fib(N2,R2))
% De manière récursive on arrive aux cas de base, puis le programme remonte
% les calculs pour donner le résultat.
```

2. Écrire en Prolog un programme `subst(N, O, l, l')` qui prend une liste `l` en paramètre et retourne une liste `l'` avec tous les éléments `O` remplacés par `N`.

   Le programme renverra :

```
[1] ?-subst(new, old, [a, old, b, c, old], R).
R = [a, new, b, c, new]
[2] ?-subst(0, 1, [1, 0, 0, 1], [0 ,0 ,0 ,0]).
Success
```

On a le programme suivant en Prolog.

Algorithme 2 Substitution dans une liste

```
% Author Clément

/*** Rappel bref ***/
% Une liste se compose d'un élément de tête 'H' qui est un élément de la liste
% et d'une queue 'T' qui est le reste de la liste.
% On a alors une liste 'l' telle que l = [H|T].

/********** BASE DE FAITS **********/
subst(N,O,[],[]) :- !. % Cas de base, la liste est vide.
/**********************************/

/********* BASE DE RÉGLES **********/
subst(N,O,[O|T],[N|R]) :- subst(N,O,T,R), !.
% L'élement de tête est O, on le remplace par N.
% T est le reste de la liste à parcourir.
% R est la queue de liste que l'on construit récursivement.
subst(N,O,[X|T],[X|R]) :- subst(N,O,T,R).
% X est un élément que l'on ne cherche pas à remplace.
```

Problème 4

Soit p, un symbole de prédicat d'arité 2.

1. Écrire une formule ϕ qui traduit que p est est une relation symétrique, transitive et que tout élément a une image par la relation (i.e. tout élément x a au moins une image y telle que $p(x, y)$).

   - Symétrie : $\phi_1 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot [p(x, y) \Rightarrow p(y, x)]$
   - Transitivité : $\phi_2 \equiv \forall x \cdot \forall y \cdot \forall z \cdot [p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)]$
   - Image : $\phi_3 \equiv \forall x \cdot \exists y \cdot p(x, y)$
   - Réflexivité : $\phi_4 \equiv \forall x \cdot p(x, x)$

2. Montrer en utilisant la méthode de résolution que p est réflexive.

   On veut montrer que l'on a $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \models \phi_4$. On va le faire par la méthode de résolution. On va donc montrer que l'ensemble $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \neg\phi_4\}$ est insatisfaisable.

   On met notre ensemble sous forme de Skolem, on renomme également nos variables pour éviter toute ambiguïté.

   Dès lors, on a :

   $\phi_1 \equiv \neg p(x_1, y_1) \vee p(y_1, x_1)$

   $\phi_2 \equiv \neg p(x_2, y_2) \vee \neg p(y_2, z_2) \vee p(x_2, z_2)$

   $\phi_3 \equiv p(x_3, f(x_3))$

   $\phi_4 \equiv \neg p(a, a)$

   On applique la règle de coupure et l'unification pour construire les résolvantes.

   $\phi_2 \wedge \phi_4$ avec les substitutions $\sigma(x_2) = a$ et $\sigma(z_2) = a$: $\phi_5 \equiv \neg p(a, y_2) \vee \neg p(y_2, a)$

$\phi_3 \wedge \phi_5$ avec les substitutions $\sigma(x_3) = a$ et $\sigma(y_2) = f(a)$: $\phi_6 \equiv \neg p(f(a), a)$

$\phi_1 \wedge \phi_6$ avec les substitutions $\sigma(y_1) = f(a)$ et $\sigma(x_1) = a$: $\phi_7 \equiv p(a, f(a))$

$\phi_3 \wedge \phi_7$ avec les substitutions $\sigma(x_3) = a$: $\perp$

On arrive bien à une contradiction. p est bien réflexive.

Rappel : Une relation R est symétrique si pour tout $(d, d') \in R$, on a $(d', d) \in R$. Elle est transitive si pour tout $(d, d') \in R$ et tout $(d', d'') \in R$, on a $(d, d'') \in R$. Enfin, elle est réflexive si tout couple $(d, d) \in R$.

Problème 5

Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.

   $\forall x \cdot \exists y \cdot ((Personne(x) \wedge Personne(y)) \Rightarrow Menti(x, y))$

2. Un chat est entré.

   $\exists x \cdot Chat(x) \wedge Entré(x)$

3. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean-Yves n'arrive pas à se concentrer.

   $(\forall x \cdot (Personne(x) \Rightarrow \neg Bruit(x)) \wedge \neg Concentrer(Jean - Yves))$

4. Quelqu'un cite un philosophe qui n'a rien écrit.

   $\exists x \cdot \exists y \cdot (Philosophe(y) \wedge Cite(x, y) \wedge \neg \exists z \cdot Ecrit(y, z))$

5. Il y'a [au moins] un exercice qu'aucun mathématicien ne sait résoudre.

   $\exists x \cdot \neg \exists y \cdot (Exercice(x) \wedge Mathematicien(y) \wedge Resoudre(y, x))$

Problème 6

On sait que la logique des prédicats du premier ordre forme une théorie *indécidable*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de vérifier si une formule logique Φ est valide ou non.
On considère le raisonnement suivant :

$$\{\forall x \cdot (P(x) \Rightarrow Q(f(x))), \forall x \cdot (Q(x) \Rightarrow P(f(x))), P(A)\} \models \forall x \cdot P(x)$$

Peut-on conclure que ce raisonnement est valide ? Si non, essayer de montrer que la conclusion n'est pas une conséquence logique des hypothèses en exhibant un contre-exemple.

Considérons que le raisonnement est formé de l'ensemble de clauses $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. On met le raisonnement sous forme de Skolem.
$\gamma_1 \equiv \neg P(x) \vee Q(f(x))$
$\gamma_2 \equiv \neg Q(x) \vee P(f(x))$
$\gamma_3 \equiv P(A)$

$\neg C \equiv \gamma_c \equiv \neg P(A')$
On applique le principe de résolution.
$\gamma_1 \wedge \gamma_c$ avec la substitution $\sigma(x) = A'$: $\gamma_4 \equiv Q(f(A'))$
$\gamma_1 \wedge \gamma_3$ avec la substitution $\sigma(x) = A$: $\gamma_4 \equiv Q(f(A))$
$\gamma_4 \wedge \gamma_2$ avec la substitution $\sigma(x) = f(A')$: $\gamma_5 \equiv P(f(f(A)))$
$\vdots$
On peut former autant de résultante que l'on veut, mais on montre par récurrence que l'on n'arrivera jamais à exhiber une contradiction. On ne peut donc pas conclure que le résultat est valide.
Soit P la relation "$\in \mathbb{Z}$" et Q la relation "$\in \mathbb{N}$" et f la fonction valeur absolue "$|.|$", notre domaine d'interprétation est $M = \mathbb{R}$.
Nos prémisses sont bien valides, mais la conclusion n'est pas une conséquence logique.