Tutorat logique : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

Soit $\phi(x)$ une formule de la logique du premier ordre avec une variable libre x, définie sur un langage du premier ordre $\mathcal{L}$.
Démontrer que $\forall x \cdot \phi(x)$ n'est pas valide si et seulement si $\exists x \cdot \neg\phi(x)$ est satisfaisable.

Problème 2

Soit un langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{P\}$ où P est un symbole de prédicat d'arité 2.
Montrer à l'aide de la méthode de résolution que la formule suivante est valide.

$$\neg\exists y \cdot \forall z \cdot (P(z, y) \Leftrightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z, x) \wedge P(x, z)))$$

Problème 3

On considère les deux formules de la logique des prédicats du premier ordre suivantes :

$$\forall x \cdot [P(x) \Rightarrow \exists y \cdot Q(x, y)] \quad (1) \qquad \exists x \cdot [P(x) \Rightarrow \forall y \cdot Q(x, y)] \quad (2)$$

Donner un modèle pour la formule (1) pour lequel la formule (2) soit fausse.

Problème 4

Montrer en utilisant le principe de résolution que les raisonnements R_i suivants sont valides.

1. Soit le raisonnement R_1 :

   $\Phi_1 : \forall x \cdot \exists y \cdot P(x, y)$
   $\Phi_2 : \forall z \cdot \forall t \cdot P(z, t) \Rightarrow Q(z)$
   $C : \forall u \cdot Q(u)$

2. Soit le raisonnement R_2 :

   $\Phi_1 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow P(f(x))$
   $\Phi_2 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow R(f(x))$
   $C : \forall x \cdot R(x) \Rightarrow P(f(x))$

3. Soit le raisonnement R_3 :

   $\Phi_1 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow Q(s(x))$
   $\Phi_2 : \forall x \cdot Q(x) \Rightarrow P(s(x))$
   $\Phi_3 : P(A)$
   $C : P(s(s(s(s(A)))))$

Problème 5

On se donne un langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{f, P, c\}$ où f est un symbole de fonction d'arité 1, P un symbole de prédicat d'arité 2 et c un symbole constant (d'arité 0). On suppose également que l'on dispose du symbole d'égalité $=$. Exprimer les propriétés suivantes en logique du premier ordre.

1. Tout élément et son image par f sont en relation par P.
2. La fonction f coïncide avec la relation P. Autrement dit, si on voit f comme une relation binaire, alors elle est égale à P.
3. c est le seul élément dont l'image par f est égale à lui même.
4. Si on suppose que P est une relation d'ordre, exprimer que f est monotone (soit croissant, soit décroissante).

Problème 6

Soit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{R, S\}$ composé de deux prédicats d'arité 2. On considère les deux formules logiques suivantes :

$$\exists x \cdot \forall y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (1) \qquad \forall x \cdot \exists y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (2)$$

1. Déterminer une structure $\mathcal{M} = \left(M, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}\right)$ tel que la valeur de vérité des deux formules soit différente.
2. Modifier uniquement le domaine M de $\mathcal{M}$, de telle manière que les deux formules soient vraies.

Problème 7

Pour chaque cas, dire si les deux formules atomiques proposées sont unifiables et en donner la résolution lorsque c'est possible.

1. $A(x, g(x, y))$ $\qquad A(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$
2. $B(x, f(g(y)), f(x))$ $\qquad B(h(t, z), f(z), f(h(y, z)))$
3. $P(u, g(f(A, b)), u)$ $\qquad P(f(x, g(z)), x, f(y, g(B)))$
4. $P(x, f(x), f(f(x)))$ $\qquad P(f(f(y)), y, f(y))$

Problème 8

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses puis les démontrer si elles sont vraies, donner un contre-exemple si elles sont fausses.

1. $\models \forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$
2. $\models \exists x \cdot \Phi(x) \vee \exists x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \exists x \cdot [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$
3. $\models \forall x \cdot [\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$
4. $\models \exists y \cdot \forall x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \forall x \cdot \exists y \cdot \Phi(x, y)$
5. $\models \forall y \cdot \exists x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \exists x \cdot \forall y \cdot \Phi(x, y)$

Problème 9

Soit l'ensemble de formules :

$$\Sigma = \{\exists x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x)), \forall z \cdot \neg((\exists x \cdot \neg G(x)) \Rightarrow \forall y \cdot P(y))\}$$

Transformer l'ensemble Σ en un ensemble S de clôtures universelles de clauses.