Tutorat logique : TD3

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Logique pour l'informatique

*
* *

Problème 1

Soit $\phi(x)$ une formule de la logique du premier ordre avec une variable libre x, définie sur un langage du premier ordre $\mathcal{L}$.
Démontrer que $\forall x \cdot \phi(x)$ n'est pas valide si et seulement si $\exists x \cdot \neg\phi(x)$ est satisfaisable.

On a les équivalences suivantes :

1. $\forall x \cdot \phi(x)$ n'est pas valide
2. Par définition de la validité. Il existe une structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \not\models \forall x \cdot \phi(x)$.
3. Par définition de la négation. Il existe une structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models \neg\forall x \cdot \phi(x)$.
4. Il existe une structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models \exists x \cdot \neg\phi(x)$.
5. Soit $\exists x \cdot \neg\phi(x)$ est satisfaisable.

Problème 2

Soit un langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{P\}$ où P est un symbole de prédicat d'arité 2.
Montrer à l'aide de la méthode de résolution que la formule suivante est valide.

$$\neg\exists y \cdot \forall z \cdot (P(z,y) \Leftrightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))$$

Pour montrer la validité d'une formule, deux choix d'offre à nous :

1. Soit montrer qu'elle est vraie pour toute structure $\mathcal{M}$ d'interprétation.
2. Soit la nier puis appliquer le principe de résolution et chercher à aboutir à une contradiction.

On va ici appliquer la deuxième méthode. On nomme Ψ la formule dont la validité est à démontrer, soit $\Psi \equiv \neg\exists y \cdot \forall z \cdot (P(z,y) \Leftrightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))$.
Dès lors

$$\begin{aligned}\neg\Psi &\equiv \neg[\neg\exists y \cdot \forall z \cdot (P(z,y) \Leftrightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))] \\ &\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot [P(z,y) \Rightarrow (\neg\exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))] \wedge [(\neg\exists x' \cdot (P(z,x') \wedge P(x',z))) \Rightarrow P(z,y)] \\ &\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot [\neg P(z,y) \vee (\neg\exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))] \wedge [\exists x' \cdot (P(z,x') \wedge P(x',z)) \vee P(z,y)]\end{aligned}$$

$$\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot [\neg P(z,y) \vee (\neg \exists x \cdot (P(z,x) \wedge P(x,z)))] \wedge [\exists x' \cdot (P(z,x') \wedge P(x',z)) \vee P(z,y)]$$
$$\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot [\neg P(z,y) \vee (\forall x \cdot \neg (P(z,x) \wedge P(x,z)))] \wedge [\exists x' \cdot (P(z,x') \wedge P(x',z)) \vee P(z,y)]$$
$$\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot [\exists x' \cdot (P(z,x') \wedge P(x',z)) \vee P(z,y)] \wedge [\neg P(z,y) \vee (\forall x \cdot \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z))]$$
$$\equiv \exists y \cdot \forall z \cdot \exists x' \cdot \forall x \cdot [(P(z,x') \wedge P(x',z)) \vee P(z,y)] \wedge [\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)]$$

On va skolemiser la formule, on va faire intervenir le symbole constante A et la fonction unaire f.
$\neg \Psi \equiv [(P(z,f(z)) \wedge P(f(z),z)) \vee P(z,A)] \wedge [\neg P(z,A) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)]$
Puis mettre la formule sous forme normale conjonctive. Soit :
$\neg \Psi \equiv (P(z,a) \vee P(z,f(z))) \wedge (P(z,a) \vee P(f(z),z))) \wedge ((\neg P(z,a) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z))$
Il résulte l'ensemble de clauses suivant :

$$S = \{P(z,a) \vee P(z,f(z)), P(z,a) \vee P(f(z),z)), \neg P(z,a) \vee \neg P(z,x) \vee \neg P(x,z)\} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$$

On peut appliquer la résolution à l'aide du principe de coupure et substitution :
$\psi_1 \wedge \psi_2$ avec les substitutions $\sigma(x) = a$ et $\sigma(z) = a$: $\psi_4 \equiv P(a, f(a))$
$\psi_1 \wedge \psi_3$ avec les substitutions $\sigma(x) = a$ et $\sigma(z) = a$: $\psi_5 \equiv P(f(a), a)$
$\psi_1 \wedge \psi_5$ avec les substitutions $\sigma(x) = a$ et $\sigma(z) = f(a)$: $\psi_6 \equiv \neg P(a, f(a))$
$\psi_4 \wedge \psi_6$: $\perp$
On aboutit à une contradiction. Dès lors, la formule Ψ est valide.

Problème 3

On considère les deux formules de la logique des prédicats du premier ordre suivantes :

$$\forall x \cdot [P(x) \Rightarrow \exists y \cdot Q(x,y)] \quad (1) \qquad \exists x \cdot [P(x) \Rightarrow \forall y \cdot Q(x,y)] \quad (2)$$

1. Donner un modèle pour la formule (1) pour lequel la formule (2) soit fausse.

   Soit le domaine $M = \mathbb{Z}$ et l'interprétation des prédicats suivante : P est vrai si $x \in \mathbb{N}$ et Q est vrai si $x > y$.

   En effet, on a bien $\forall x \in \mathbb{N}, x > -1$. La structure est un modèle pour (1).

   Or, il n'existe pas de nombre plus grand que tous les autres, donc la formule (2) n'est pas satisfaite.

2. Donner un modèle pour la formule (2) pour lequel la formule (1) soit fausse.

   Soit le domaine $M = \mathbb{Z}$ et l'interprétation des prédicats suivante : P est vrai si $x \in \mathbb{N}$ et Q est vrai si $x + y - y = 0$.

   En effet, pour $x = 0$, l'énoncé (2) est vérifiée et la structure est donc bien un modèle pour (2), mais pour l'énoncé n'est pas vérifiée pour tout $x \in \mathbb{N}$, dès lors cette structure n'est pas un modèle pour (1).

Problème 4

Montrer en utilisant le principe de résolution que les raisonnements R_i suivants sont valides.

1. Soit le raisonnement R_1 :

$\Phi_1 : \forall x \cdot \exists y \cdot P(x, y)$
$\Phi_2 : \forall z \cdot \forall t \cdot P(z, t) \Rightarrow Q(z)$
$C : \forall u \cdot Q(u)$

> On skolemise les formules et on nie la conclusion.
>
> $\Phi_1 \equiv P(x, f(x))$
>
> $\Phi_2 \equiv \neg P(z, t) \vee Q(z)$
>
> $\neg C \equiv \neg Q(A)$
>
> $\neg C \wedge \Phi_2$ avec la substitution $\sigma(z) = A$: $\Phi_3 \equiv \neg P(A, t)$
>
> $\Phi_1 \wedge \Phi_3$ avec les substitutions $\sigma(x) = A$ et $\sigma(t) = f(A)$: $\perp$

2. Soit le raisonnement R_2 :

$\Phi_1 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow P(f(x))$
$\Phi_2 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow R(f(x))$
$C : \forall x \cdot R(x) \Rightarrow P(f(x))$

> $\Phi_1 \equiv \neg P(x) \vee P(f(x))$
>
> $\Phi_2 \equiv \neg P(x) \vee R(f(x))$
>
> $\neg C \equiv \neg(\forall x \cdot R(x) \Rightarrow P(f(x))) \equiv \exists x \cdot \neg(R(x) \Rightarrow P(f(x)) \equiv R(A) \wedge \neg P(f(A))$
>
> On a deux clauses pour la conclusion $\neg C_1 \equiv R(A)$ et $\neg C_2 \equiv \neg P(f(A))$
>
> $\Phi_1 \wedge \neg C_2$ avec la substitutions $\sigma(x) = A$: $\Phi_3 \equiv P(A)$
>
> $\Phi_1 \wedge \Phi_3$ avec la substitutions $\sigma(x) = A$: $\Phi_4 \equiv P(f(A))$
>
> $\Phi_4 \wedge \neg C_2$: $\perp$

3. Soit le raisonnement R_3 :

$\Phi_1 : \forall x \cdot P(x) \Rightarrow Q(s(x))$
$\Phi_2 : \forall x \cdot Q(x) \Rightarrow P(s(x))$
$\Phi_3 : P(A)$
$C : P(s(s(s(s(A)))))$

> $\Phi_1 \equiv \neg P(x) \vee Q(s(x))$
>
> $\Phi_2 \equiv \neg Q(x) \vee P(s(x))$
>
> $\Phi_3 \equiv P(A)$
>
> $\neg C \equiv \neg P(s(s(s(s(A)))))$
>
> $\neg C \wedge \Phi_2$ avec la substitution $\sigma(x) = s(s(s(A)))$: $\Phi_4 \equiv \neg Q(s(s(s(A))))$
>
> $\Phi_4 \wedge \Phi_1$ avec la substitution $\sigma(x) = s(s(A))$: $\Phi_5 \equiv \neg P(s(s(A)))$
>
> $\Phi_5 \wedge \Phi_2$ avec la substitution $\sigma(x) = s(A)$: $\Phi_6 \equiv \neg Q(s(A))$
>
> $\Phi_6 \wedge \Phi_1$ avec la substitution $\sigma(x) = A$: $\Phi_7 \equiv \neg P(A)$

‖ $\Phi_7 \wedge \Phi_3 : \bot$

Problème 5

On se donne un langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{f, P, c\}$ où f est un symbole de fonction d'arité 1, P un symbole de prédicat d'arité 2 et c un symbole constant (d'arité 0). On suppose également que l'on dispose du symbole d'égalité =. Exprimer les propriétés suivantes en logique du premier ordre.

1. Tout élément et son image par f sont en relation par P.

‖ $\forall x \cdot p(x, f(x))$ (on peut aussi $\forall x \cdot p(f(x), x)$ ou $\forall x \cdot p(x, f(x)) \vee p(f(x), x)$)

2. La fonction f coïncide avec la relation P. Autrement dit, si on voit f comme une relation binaire, alors elle est égale à P.

‖ $\forall x \cdot \forall y \cdot p(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$

3. c est le seul élément dont l'image par f est égale à lui même.

‖ $f(c) = c \wedge \forall x \cdot (\neg(x = c) \Rightarrow \neg(f(x) = x))$

4. Si on suppose que P est une relation d'ordre, exprimer que f est monotone (soit croissant, soit décroissante).

‖ $[\forall x \cdot \forall y \cdot (p(x, y) \Rightarrow p(f(x), f(y)))] \vee [\forall x \cdot \forall y \cdot (p(y, x) \Rightarrow p(f(y), f(x)))]$

Problème 6

Soit le langage du premier ordre $\mathcal{L} = \{R, S\}$ composé de deux prédicats d'arité 2. On considère les deux formules logiques suivantes :

$$\exists x \cdot \forall y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (1) \qquad \forall x \cdot \exists y \cdot R(x, y) \Rightarrow S(x, y) \quad (2)$$

1. Déterminer une structure $\mathcal{M} = \left(M, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}\right)$ tel que la valeur de vérité des deux formules soit différente.

‖ Les entités $f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}$ sont laissées à l'interprétation du lecteur et importe peu dans notre cas.

‖ Soit $M = \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ et $R(x, y)$ le prédicat symbolisant la relation $x \leq y$ et $S(x, y)$ le prédicat symbolisant la division euclidienne, c'est-à-dire que S est vrai si y divise x.

‖ Ainsi, $\mathcal{M}$ est un modèle de (2) mais elle ne satisfait pas la formule (1).

2. Modifier uniquement le domaine M de $\mathcal{M}$, de telle manière que les deux formules soient vraies.

‖ En posant $M = \mathbb{N}^*$. La structure est un modèle pour les deux formules (1) et (2).

Problème 7

Pour chaque cas, dire si les deux formules atomiques proposées sont unifiables et en donner la résolution lorsque c'est possible.

1. $A(x, g(x, y))$ $\qquad$ $A(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$

L'arité des deux prédicats n'est pas la même. On peut pas résoudre.

2. $B(x, f(g(y)), f(x)) \qquad B(h(t,z), f(z), f(h(y,z)))$

   On applique la substitution $\sigma(x) = h(t,z)$

   $B(h(t,z), f(g(y)), f(h(t,z))) \qquad B(h(t,z), f(z), f(h(y,z)))$

   On applique la substitution $\sigma(t) = y$

   $B(h(y,z), f(g(y)), f(h(y,z))) \qquad B(h(y,z), f(z), f(h(y,z)))$

   On applique la substitution $\sigma(z) = g(y)$

   $B(h(y,g(y)), f(g(y)), f(h(y,g(y)))) \qquad B(h(y,g(y)), f(g(y)), f(h(y,g(y))))$

   On a unifier les deux formules.

3. $P(u, g(f(A,b)), u) \qquad P(f(x, g(z)), x, f(y, g(B)))$

   On applique la substitution $\sigma(x) = g(f(A,b))$

   $P(u, g(f(A,b)), u) \qquad P(f(g(f(A,b)), g(z)), g(f(A,b)), f(y, g(B)))$

   On applique la substitution $\sigma(u) = f(y, g(B)))$

   $P(f(y,g(B)), g(f(A,b)), f(y,g(B))) \qquad P(f(g(f(A,b)), g(z)), g(f(A,b)), f(y, g(B)))$

   On applique la substitution $\sigma(y) = g(f(A,b))$

   $P(f(g(f(A,b)), g(B)), g(f(A,b)), f(g(f(A,b)), g(B))) \qquad P(f(g(f(A,b)), g(z)), g(f(A,b)), f(g(f(A,b)), g(B)))$

   On applique la substitution $\sigma(z) = B$

   $P(f(g(f(A,b)), g(B)), g(f(A,b)), f(g(f(A,b)), g(B))) \qquad P(f(g(f(A,b)), g(B)), g(f(A,b)), f(g(f(A,b)), g(B)))$

   On a unifier les deux formules.

4. $P(x, f(x), f(f(x))) \qquad P(f(f(y)), y, f(y))$

   On démontrer pas récurrence que l'on ne peut pas unifier les deux formules.

Problème 8

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses puis les démontrer si elles sont vraies, donner un contre-exemple si elles sont fausses.

1. $\models \forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$

   La propriété est *vraie*.

   On va montrer que la négation de la formule est insatisfaisable.

   $\neg(\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)])$

   $\neg([\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]] \wedge [\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]] \Rightarrow [(\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)])$

   $\neg(\neg[\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)] \vee [\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]] \wedge \neg[\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]] \vee [(\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)])$

   Par commutativité de $\vee$et $\wedge$ et absorption. On a :

   $\neg(\neg[\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)] \vee [(\forall x \cdot \Phi(x) \wedge \forall x \cdot \Psi(x)] \wedge [\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]] \vee \neg[\forall x \cdot [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]])$

Par application du tiers-exclu, il vient que :

$\neg(\top \wedge \top) = \neg\top = \bot$

2. $\models \exists x \cdot \Phi(x) \vee \exists x \cdot \Psi(x) \Leftrightarrow \exists x \cdot [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$

La propriété est *vraie.*

On effectue une preuve par double implication pour montrer l'équivalence.

On montre que $\exists x \cdot P(x) \vee Q(x) \Rightarrow \exists x \cdot P(x) \vee \exists x \cdot Q(x)$.

On suppose que $\exists x \cdot P(x) \vee Q(x)$ est vraie. Dès lors $P(c) \vee Q(c)$ est vraie pour un certain c.

On discute selon les cas :

- si $P(c)$ est vrai, alors alors $\exists x \cdot P(x)$ est vraie.
- Si $Q(c)$ est vrai, alors alors $\exists x \cdot Q(x)$ est vraie.

Dans les deux cas, $\exists x \cdot P(x) \vee \exists x \cdot Q(x)$ est vraie.

On prouve désormais que $\exists x \cdot P(x) \vee \exists x \cdot Q(x) \Rightarrow \exists x \cdot P(x) \vee Q(x)$.

On suppose que $\exists x \cdot P(x) \vee \exists x \cdot Q(x)$.

On discute selon les cas :

- Si $\exists x \cdot P(x)$ est vraie alors $P(c)$ est vrai pour une certaine constante c et ainsi $P(c) \vee Q(c)$ est vraie pour c.
- Si $\exists x \cdot Q(x)$ est vraie alors $Q(d)$ est vrai pour une certaine constante d et ainsi $P(d) \vee Q(d)$ est vraie pour d.

Dans les deux cas, $\exists x \cdot P(x) \vee Q(x)$ est vraie.

On a montré que la formule est valide.

3. $\models \forall x \cdot [\Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$

La propriété est *vraie.*

On peut définir l'opérateur $\forall x \cdot \Phi(x)$ comme $\bigwedge\limits_{a_i \in M} \Phi(a_i)$.

Dès lors $\left[\bigwedge\limits_{a_i \in M} \Phi(a_i) \Rightarrow \bigwedge\limits_{a_i \in M} \Phi(a_i)\right] = \left[\neg \bigwedge\limits_{a_i \in M} \Phi(a_i) \vee \bigwedge\limits_{a_i \in M} \Phi(a_i)\right]$

Par le principe du tiers-exclu. Il vient que la formule est valide.

4. $\models \exists y \cdot \forall x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \forall x \cdot \exists y \cdot \Phi(x, y)$

La propriété est *vraie.*

En effet, si une structure $\mathcal{M}$ satisfait $\exists y \cdot \forall x \cdot \Phi(x, y)$, alors, il existe $a \in M$ (où M est le domaine d'interprétation de la structure $\mathcal{M}$) tel que, pour tout $b \in M$ on a $\mathcal{M} \models \Phi(a, b)$.

Ainsi, à chaque $b \in M$, on peut donc associer un $a \in M$, en particulier, le même qui satisfait la première partie de notre énoncé tel que $\mathcal{M} \models \Phi(a, b)$.

5. $\models \forall y \cdot \exists x \cdot \Phi(x, y) \Rightarrow \exists x \cdot \forall y \cdot \Phi(x, y)$

La propriété est *fausse.*

On exhibe un contre-exemple. On considère l'interprétation suivante du prédicat Φ, comme la relation $x < y$ et le domaine d'interprétation $M = \mathbb{Z}$. Alors $\forall y \cdot \exists x \cdot \Phi(x, y)$ est vraie, cependant, $\exists x \cdot \forall y \cdot \Phi(x, y)$ est fausse. donc la formule n'est pas satisfaite pour cette structure, elle n'est pas valide.

Problème 9

Soit l'ensemble de formules :

$$\Sigma = \{\exists x \cdot P(x) \Rightarrow \forall y \cdot P(y), \forall x \cdot (P(x) \vee Q(x)), \forall z \cdot \neg((\exists x \cdot \neg G(x)) \Rightarrow \forall y \cdot P(y))\}$$

Transformer l'ensemble Σ en un ensemble S de clôtures universelles de clauses.

On note $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ avec :

$\sigma_1 \equiv \exists x P(x) \Rightarrow \forall y P(y)$

$\sigma_2 \equiv \forall x(P(x) \vee Q(x))$

$\sigma_3 \equiv \forall z \neg(\exists x \neg G(x) \Rightarrow \forall y P(y))$

Mise sous forme de Skolem :

$\sigma_1 \equiv \exists x \neg P(x) \vee \forall y P(y) \equiv \neg P(a) \vee P(y)$

$\sigma_2 \equiv P(x) \vee Q(x)$

$\sigma_3 \equiv \forall z \neg((\exists x \neg G(x)) \Rightarrow \forall y P(y)) \equiv \forall z(\exists x \neg G(x) \wedge \exists y \neg P(y)) \equiv \neg G(f(z)) \wedge \neg P(g(z)$

On a alors l'ensemble S tel que :

$$S = \{\neg P(a) \vee P(y), P(x) \vee Q(x), \neg G(f(z)), \neg P(g(z))\}$$