

Tutorat mathématiques : TD5
Université François Rabelais
Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

1. Soit E , un \mathbb{K} -ev de vecteur nul 0_E , compléter et répondre aux questions :
 - (a) F est un s -ev de $E \Leftrightarrow \dots$
Le plus grand et le plus petit (pour l'inclusion) s -ev de E sont respectivement ... et ...
 - (b) Si F et G sont deux s -ev de E alors :
 - $F \cap G$ est un
 - $F \cup G$ est un s -ev de $E \Leftrightarrow \dots$
 Définir :
 - $F + G = \dots$
 - $F + F = \dots$
 - $F + E = \dots$
 - (c) Quels sont les s -ev de \mathbb{R}^2 ?
2. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs : $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.
 - (a) Définir $F = \text{Vect}(u_1, u_2) = \dots$
Que peut-on dire de F ?
 - (b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $v = (x, y, z)$ appartienne à F .
 - (c) Donner une famille génératrice du plan \mathcal{P} d'équation : $x - y + z = 0$.

Problème 2

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère les vecteurs suivants :

$u = (1, 0, 0, 1), v = (1, 0, 1, 1), w = (1, 0, -2, 1)$ et $t = (1, 0, -3, 1)$.

1. Définir $F = \text{Vect}(u, v, w, t)$ et le rang r de la famille de vecteurs (u, v, w, t) .
2. En utilisant la méthode d'échelonnement : déterminer r , une base échelonnée et la dimension de F .
3. Dédurre de ce qui précède un supplémentaire G de F dans E .
4. Déterminer un système d'équation(s) caractérisant F .

Problème 3

Soient A, F et G les sous-ensembles de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ définis tels que :

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{Z}\}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a, b, a - b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Justifier que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , en donner une base. Idem pour G .
3. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur les réels x, y, z pour que $u = (x, y, z)$ appartienne à G . en déduire un système d'équation(s) de G .
4. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel? Justifier.
5. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel, en donner une base et sa dimension.
6. Définir $F + G$ puis par un raisonnement que l'on indiquera, déduire de ce qui précède que $F + G = E$. Cette somme est-elle directe?
7. Quels sont les supplémentaires de F dans E ? Illustrer par une figure.

Problème 4

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que $f(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$

1. Montrer que f est effectivement une application linéaire.
2. Sans le démontrer, donner la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et la matrice A , représentative de f relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .
3. Déterminer le noyau de f , en donner une base et sa dimension. Que peut-on en déduire pour f ?
4. Énoncer le théorème du rang pour f , puis, en déduire que f est surjective.

Problème 5

Soit l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice représentative dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Puis $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z)$.
2. Prouver que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 , en déduire son noyau et son image.
3. Déterminer $f^{-1}(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer la matrice B représentant $f \circ f$ dans \mathcal{B} .
5. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1), v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
6. Déterminer la matrice D représentant f dans \mathcal{B}_1 .