Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

Soit E l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[-1, 1]$ telles que :

$$f(1) - f(-1) = 2f(0)$$

1. Montrer que pour les opérations usuelles, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble G des fonctions de E, continues, telles que :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$$

   est un sous-espace vectoriel de E.

Problème 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{a} = (2, 5)$, $\overrightarrow{b} = (3, 1)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont indépendants.
2. On pose $\overrightarrow{c} = (4, 2)$. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c}$ sont-ils indépendants ?
3. Pourquoi $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ forment-ils une base ? Donner les coordonnées de $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Problème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, ..., f_n)$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_0(x) & = 1 \\ f_1(x) & = x + 1 \\ f_2(x) & = (x+1)(x+2) \\ & \vdots \\ f_n(x) & = (x+1)(x+2)...(x+n) \end{cases}$$

est une base de l'espace vectoriel de $P \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Problème 4

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. On note E l'ensemble des éléments de $f \in E$ tel que :

$$f^{(3)} - 6f'' + 12f' - 8f = \theta$$

où θ désigne la fonction constante nulle et f', f'' et $f^{(3)}$ les fonctions dérivées respectivement première, seconde et troisième de f.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
2. Vérifier que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = e^{2x}$ est un élément de E.
3. À toute fonction de $\mathcal{F}$, on associe la fonction g définie par $g(x) = f(x)e^{-2x}$.
   Montrer que $f \in E$ si et seulement si g est trois fois dérivable et vérifie $g^{(3)} = \theta$.
4. En déduire la forme générale des éléments de E, une base de E et sa dimension.

Problème 5

On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont *supplémentaires*, que l'on note $E_1 \oplus E_2 = E$, c'est à dire :

$$E_1 \oplus E_2 = E \Leftrightarrow (E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \text{ et } \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E))$$

On définit les deux matrices $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, et $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2c & c-d \\ d & 2d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème 6

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes muni des opérations usuelles.
Montrer que pour tout polynôme P du second degré et pour tout réel non nul m, la famille $\mathcal{F}_m = (P, Q, R)$ où

$$\forall X \in \mathbb{R} \quad , \quad Q(X) = P(X+m), \quad \text{et} \quad R(X) = P(X-m)$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Problème 7

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de dimension 3, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base E.