Tutorat mathématiques : TD4

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

Soit E l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[-1, 1]$ telles que :

$$f(1) - f(-1) = 2f(0)$$

1. Montrer que pour les opérations usuelles, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

> On sait que l'ensemble $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonction numériques définies sur $[-1, 1]$
>
> est un espace vectoriel pour les opérations d'addition des fonctions et de multiplication par des réels.
>
> Pour établir que E est un espace vectoriel, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$.
>
> - E n'est pas vide car la fonction nulle $\theta \in E$.
> - Soient f et g deux fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
>
> $$\begin{aligned}(f+g)(1) - (f+g)(-1) &= f(1) + g(1) - f(-1) - g(-1)\\ &= f(1) - f(-1) + g(1) - g(-1)\\ &= 2f(0) + 2g(0)\\ &= 2(f+g)(0)\end{aligned}$$
>
>   On en déduit que $(f + g) \in E$.
>
>   D'autre part :
>
> $$\begin{aligned}(\lambda f)(1) - (\lambda f)(-1)+ &= \lambda(f(1) + -f(-1))\\ &= \lambda(2f(0))\\ &= 2(\lambda f)(0)\end{aligned}$$
>
>   Ainsi, $\lambda f \in E$. Dès lors $(E, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ et donc, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles sur les fonctions.

2. Montrer que l'ensemble G des fonctions de E, continues, telles que :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E.

La fonction nulle sur $[-1,1]$ θ appartient à G.

Par définition, $G \subseteq E$.

Soient f et g deux fonctions de G et $\lambda \in \mathbb{R}$. On déduit de la linéarité de l'intégrale que $(f+g) \in G$ et $\lambda f \in G$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

Problème 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{a} = (2,5)$, $\overrightarrow{b} = (3,1)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont indépendants.

   Soit une famille de vecteurs $\{\overrightarrow{u_i} | i \in \{1,..,n\}\}$, ceux-ci sont indépendants si

   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,...,n\}, \lambda_i = 0$$

   Dès lors, on est amené à résoudre : $\alpha(2,5) + \beta(3,1) = 0$

   $$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta & = 0 \\ 5\alpha + \beta & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 15\alpha & = 0 \\ \beta & = -5\alpha \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont effectivement indépendants.

2. On pose $\overrightarrow{c} = (4,2)$. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, et $\overrightarrow{c}$ sont-ils indépendants ?

   On résout $\alpha(2,5) + \beta(3,1) + \gamma(4,2) = (0,0)$

   Soit : $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma & = 0 \\ 5\alpha + \beta + 2\gamma & = 0 \end{cases}$

   C'est un système d'équations homogène et puisque le système comporte moins d'équations que d'inconnues, il y a une infinité de solutions, il y'a donc des solutions non nulles et les vecteurs sont dépendants.

3. Pourquoi $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ forment-ils une base ? Donner les coordonnées de $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

   On a montré que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont linéairement indépendants, dès lors, l'ensemble $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ forme une famille libre. Montrons que que $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ forme une famille génératrice.

   Une famille de vecteurs $\{\overrightarrow{u_i} | i \in \{1,..,n\}\}$ est génératrice si et seulement si tout vecteur $\overrightarrow{v} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_i}$.

   Dès lors, on exprime un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ tel que : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{v} = (\alpha,\beta), \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} | \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}$

   Soit : $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = \alpha \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 & = \beta \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3(\beta - 5\lambda_1) & = \alpha \\ \lambda_2 & = \beta - 5\lambda_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{-\alpha+3\beta}{13} \\ \lambda_2 & = \beta - 5\left(\frac{-\alpha+3\beta}{13}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{-\alpha+3\beta}{13} \\ \lambda_2 & = \frac{5\alpha-2\beta}{13} \end{cases}$$

$\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ forme une famille génératrice, de plus elle est libre, c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^2$.
On cherche exprime $\overrightarrow{c}$ dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. On a $\overrightarrow{c} = \frac{2}{13}\overrightarrow{a} + \frac{16}{13}\overrightarrow{b}$.

Problème 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la base $\mathcal{B} = (f_0, f_1, ..., f_n)$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_0(x) & = 1 \\ f_1(x) & = x+1 \\ f_2(x) & = (x+1)(x+2) \\ & \vdots \\ f_n(x) & = (x+1)(x+2)...(x+n) \end{cases}$$

est une base de l'espace vectoriel de $P \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

La famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, ..., f_n)$ comporte $n+1$ éléments et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1/$
En conséquence, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = \theta \quad (*)$
avec θ la fonction polynôme nulle.

$$(*) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(X) = 0$$

En donnant à la variable successivement les valeurs

$$-1, -2, ..., -k, ... - (n+1)$$

On obtient :
$X = -1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(-1) = \lambda_0 = 0$
$X = -2 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(-1) = \lambda_0 - \lambda_1 = -\lambda_1 = 0$
$\vdots$
$X = -(n+1) \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(-(n+1)) = (-1)^n n! \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0$
On a obtenu : $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, 0, ..., 0)$ ce qui montre que $\mathcal{B}$ est bien une base $\mathbb{R}_n[X]$

Problème 4

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni des opérations usuelles. On note E l'ensemble des éléments de $f \in E$ tel que :

$$f^{(3)} - 6f'' + 12f' - 8f = \theta$$

où θ désigne la fonction constante nulle et f', f'' et $f^{(3)}$ les fonctions dérivées respectivement première, seconde et troisième de f.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

   Soient f et g, deux éléments de E. La fonction $f+g$ est trois fois dérivable et par la linéarité de la dérivation, on a :

   $$\begin{aligned}(f+g)^{(3)} - 6(f+g)'' + 12(f+g)' - 8(f+g) &= f^{(3)} - 6f'' + 12f' - 8f + g^{(3)} - 6g'' + 12g' - 8 \\ &= \theta + \theta \\ &= \theta\end{aligned}$$

   On a bien $(f+g) \in E$.

   Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a de même :

   $$\begin{aligned}(\lambda f)^{(3)} - 6(\lambda f)'' + 12(\lambda f)' - 8(\lambda f) &= \lambda(f^{(3)} - 6f'' + 12f' - 8f) \\ &= \lambda\theta \\ &= \theta\end{aligned}$$

   Donc $\lambda f \in E$, et donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

2. Vérifier que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = e^{2x}$ est un élément de E.

   La fonction ϕ est de classe C^∞ donc trois fois dérivable, et ses dérivées successives vérifient :

   $\phi'(x) = 2\phi(x) = 2e^{2x}$

   $\phi''(x) = 2^2\phi(x) = 4e^{2x}$

   $\phi^{(3)}(x) = 2^3\phi(x) = 8e^{2x}$

   Et ainsi, on voit que :

   $e^{2x}(8 - 24 + 24 - 8) = 0$

   et donc que $\phi \in E$.

3. À toute fonction de $\mathcal{F}$, on associe la fonction g définie par $g(x) = f(x)e^{-2x}$.

   Montrer que $f \in E$ si et seulement si g est trois fois dérivable et vérifie $g^{(3)} = \theta$.

   Si $f \in E$ alors f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ avec $n \geq 3$. et donc g est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

   Les dérivées successives de g valent :

   $g'(x) = -2f(x)e^{-2x} + f'(x)e^{-2x} = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x))$

   $g''(x) = e^{-2x}(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))$

   $g^{(3)}(x) = e^{-2x}(f^{(3)}(x) - 6f''(x) + 12f'(x) - 8f(x)) = 0$

   Le calcul précédent montre que $g^{(3)} = f^{(3)} - 6f'' + 12f' - 8f = \theta$

On en déduit alors que $f \in E \Leftrightarrow g^{(3)} = \theta$.

4. En déduire la forme générale des éléments de E, une base de E et sa dimension.

Soient $f \in E$ et la fonction g associée. On a montré que $g^{(3)} = \theta$. Dès lors, on en déduit que g est telle que $\exists(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$.

En conséquences,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

Notons ψ et χ les fonctions sur $\mathbb{R}$ définies telles que $\psi = x^2e^{2x}$ et $\chi(x) = xe^{2x}$. On a alors

$$f = a\psi + b\chi + c\phi$$

La famille $\mathcal{B} = (\psi, \chi, \phi)$ est une famille génératrice de E.

Montrons que c'est une famille libre.

En calculant $f(0), f(-1)$ et $f(1)$. On déduit un système qui conduit à $a = b = c = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E et E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ de dimension 3.

Problème 5

On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont *supplémentaires*, que l'on note $E_1 \oplus E_2 = E$, c'est à dire :

$$E_1 \oplus E_2 = E \Leftrightarrow (E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \text{ et } \dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E))$$

On définit les deux matrices $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, et $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2c & c-d \\ d & 2d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour établir que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que V et W sont en somme directe, et que $\dim(V) + \dim(W) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire que $V \cap W = \{\mathcal{O}_2\}$ et que $\dim(V) + \dim(W) = 4$

- Soient
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

  On constate que les matrices V s'écrivent sous la forme $M = aA + bB$, et celles de W sous la forme $N = cC + dD$.

  En conséquences $V = \text{Vect}(A, B)$ et $W = \text{Vect}(C, D)$.

  Montrons maintenant que (A, B) et (C, D) sont des familles libres.

  $$\begin{aligned} aA + bB = \mathcal{O}_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De même,

$$cC + dD = \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c & c-d \\ d & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que (A, B) et (C, D) sont des familles libres, et ainsi que $\dim(V) = 2$ et $\dim(W) = 2$. En conséquences $\dim(V) + \dim(W) = 4$.

- Déterminons $V \cap W$

$$M \in V \cap W \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 | M = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & c-d \\ d & 2d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 2c \\ c-d & = a+b \\ a-b & = d \\ b & = 2d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 2c \\ 2a & = c \\ 2b & = c-2d \\ b & = 2d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$$

On a bien $M = \mathcal{O}_2$.

Il résulte alors que V et W sont bien deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème 6

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes muni des opérations usuelles.
Montrer que pour tout polynôme P du second degré et pour tout réel non nul m, la famille $\mathcal{F}_m = (P, Q, R)$ où

$$\forall X \in \mathbb{R} \quad , \quad Q(X) = P(X+m), \quad \text{et} \quad R(X) = P(X-m)$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit P le polynôme défini tel que : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, P(X) = aX^2 + bX + c$ et $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} | \lambda P + \mu Q + \nu R = \theta$.

  où θ est le polynôme nul.

$$\forall X \in \mathbb{R}, \lambda P(X) + \mu Q(X) + \nu R(X) = \theta(X) \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \lambda(aX^2+bX+c)+\mu(a(X+m)^2+b(X+m)+c)+\nu(a(X-m)^2+b(X-m)+c)=0\\
&\Leftrightarrow aX^2(\lambda+\mu+\nu)+(b(\lambda+\mu+\nu)+2m(\mu-\lambda))X+c(\lambda+\mu+\nu)+m^2(\mu+\nu)+mb(\mu-\nu)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a(\lambda+\mu+\nu) & =0\\ b(\lambda+\mu+\nu)+2m(\mu-\nu) & =0\\ c(\lambda+\mu+\nu)+m^2(\mu+\nu)+mb(\mu-\nu) & =0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu & =0\\ 2m(\mu-\nu) & =0\\ m^2(\mu+\nu)+mb(\mu-\nu) & =0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & =0\\ \mu & =0\\ \nu & =0\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que (P, Q, R) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Problème 7

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de dimension 3, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   L'ensemble E est non vide car il contient au moins I_3 et $\mathcal{O}_3$.

   Soient M et N deux matrices E, on a :

   $$\begin{aligned} A(M+N) &= AM+AN\\ &= AN+AM\\ &= A(N+M)\end{aligned}$$

   Donc $(M+N)\in E$. C'est à dire que E est stable pour l'addition.

   Pour tout réel λ et toute matrice $M\in E$, les propriétés usuelles du produit donnent :

   $$\begin{aligned} A(\lambda M) &= \lambda AM\\ &= \lambda MA\\ &= (\lambda M)A\end{aligned}$$

   Ce qui montre que $\lambda M\in E$.

   E est donc, pour les opérations usuelles, un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base E.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $M \in E \Leftrightarrow MA = AM \quad (*)$

En réduisant $(*)$ à un système linéaire, on déduit que $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = i \\ d = g = h = 0 \\ b = f \end{cases}$.

On en déduit que M s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors M qui est une combinaison linéaire de I_3, J et K.

Ainsi, (I_3, J, K) est une famille génératrice de E, montrons qu'elle est libre.

$\forall(\lambda, \mu\nu) \in \mathbb{R}^3, \lambda I_3 + \mu J + \nu K = \mathcal{O}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 0 \\ \mu & = 0 \\ \nu & = 0 \end{cases}$.

On en conclut que (I_3, J, K) forme bien une base de E et que $\dim(E) = 3$.