Tutorat mathématiques : TD2

Université François Rabelais

Département informatique de Blois

Algèbre

*
* *

Problème 1

On dit qu'un anneau A est un *anneau de Boole* si :

$$\forall x \in A, x^2 = x$$

1. Démontrer que pour tout $x \in A, x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. On note $\mathbb{B} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (a) Dresser la table de Cayley de $\mathbb{B}$ pour $+$ et $\times$ et montrer que $(\mathbb{B}, +, \times)$ est un anneau de Boole. Est-ce un corps ?
   (b) Soient les opérations "ou exclusif" notée $\oplus$ et "conjonction" notée $\wedge$ du calcul propositionnel. Montrer que $(\mathbb{B}, \oplus, \wedge)$ est un corps.

Problème 2

On appelle *caractéristique* d'un anneau fini le plus petit entier n tel que :

$$n \times 1_A = 0_A$$

où 1_A est l'élément neutre de la multiplication sur A et 0_A l'élément neutre pour l'addition sur A.

1. Montrer que pour tout $x \in A, nx = 0_A$.
2. Montrer que si A est intègre, alors n est un nombre premier.

Problème 3

Soit $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

1. On rappelle que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau. Que peut-on en déduire pour $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$?
2. Définir $\overline{2}$.
3. Dresser la table de Cayley de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \times)$.
4. En justifiant, préciser si $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \times)$ est :
   (a) Un anneau commutatif.
   (b) Un anneau intègre.
   (c) Un corps.
5. En détaillant les calculs. Développer puis simplifier $(x - \overline{2018})^3$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Problème 4

Soit $\mathbb{F}$, un corps commutatif fini. Calculer le produit de tous les éléments de $\mathbb{F}^*$.

$$\prod_{x \in \mathbb{F}^*} x$$

Problème 5

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ pour $x \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. $x^2 - \overline{4}x + \overline{3} = \overline{0}$ pour $x \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Problème 6

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre.
Démontrer les propriétés (i) et (ii).

$$\forall a \in A^*, \forall (x, y) \in A^2, \begin{cases} ax = ay \Rightarrow x = y & (i) \\ xa = ya \Rightarrow x = y & (ii) \end{cases}$$

Autrement dit, tout élément non nul d'un anneau intègre est simplifiable à gauche (i) et à droite (ii) pour la multiplication.